F問題
CLIQUE DRAWING

原案 : POTETISENSEI

解法: POTETISENSEI

テスト: NUIP

解説 : LATTE0119

問題概要

辺が存在しないN頂点のグラフを用意する

以下の操作をM回行う

・i回目の操作では、頂点集合{v(i,1),v(i,2),...,v(i,Ki)}の全ての2頂点間に辺を張る

ただし、どの頂点も、M回の頂点のうち高々2回の操作にしか現れません

このようにして出来たグラフの最大独立集合を求めてください

解法

M回の操作のうち、一度も操作の対象とならないような頂点は存在しないと考えてよい

→そのような頂点は孤立点となるから、必ず最大独立集合に含まれる。それらの頂点を取り除いたグラフの最大独立集合のサイズが求まればよい

以下の方法で無向グラフGを構成

はじめ、GはM頂点の辺のないグラフ。

i=1,2,...,Nについて、以下を行う:

・問題のグラフの頂点iが、操作の対象となった回数を考える。(1 or 2)

1のとき:

A回目の操作の対象になっているとき、グラフGに辺{a,a}(自己ループ)を追加

2のとき:

a,b回目の操作の対象になっているとき、グラフGに辺{a,b}を追加

これはなに？

グラフGの線グラフは、元のグラフと一致する

元のグラフの最大独立集合のサイズ

＝グラフGの線グラフの最大独立集合のサイズ

＝グラフGの最大マッチングのサイズ

であるから、最大マッチングが計算できればよい。

(Gには多重辺が存在しますが、最大マッチングを考えるときは、1つにまとめてもかまいません)

一般グラフの最大マッチング

- 例えば、EdmondsのアルゴリズムをもちいるとO(頂点数^3)で解ける

- 今回の問題では最大マッチングの大きさだけ求まればよいので、tutte行列を用いて簡潔に求めることもできる

計算量

- グラフGの構成はO(N)で可能
- グラフGの一般最大マッチングは、O(M^3)で可能

- 以上より、O(N+M^3)で解けました。