



H: Permutation Score

原案: potetisensei

解法: potetisensei

テスト: nuip



問題

- N が与えられる。 $N!$ 個の全ての置換に関して、その置換をグラフとして表現した時にできるサイクル森を考える。サイクル森に属するサイクルの長さの総積の”分散”を求めよ。

考察

- 分散に関しては有名な公式があります
 - $\text{Var}[x] = E[x^2] - (E[x])^2$: (2次モーメント) - (1次モーメントの2乗)
 - したがって、 $E[x^2]$ や $E[x]$ を求められると良さそうです

考察

- $N = 1e5$ は大変なので、部分点を取る気持ちで一度dpをすることを考えます
 - $E[x^2]$ を求めてみましょう
 - 順列を適当に並べて($N!$ 通り)、それらを適当に区切って、各区切られた区間内でサイクルを作ります。
 - 初めの $N!$ 通りは最後にかけることとして、後半の操作に関しては
 - $dp[x][y] := p_1..p_y$ までを見て、 x 個のサイクルを作っている時の場合の数と置いて、 $dp[x+1][y+k] += dp[x][y] / k * k^2$
 - k 個で切り出してサイクルにすることにする。
 - サイクルのは k 通り回転しても一致するので重複して数えられてしまうから k で割る
 - K^2 がそのサイクルの寄与するスコア
 - 最後に $dp[k][N] / k!$ を全て足し合わせると $E[x^2]$ が求まっている
 - 足し合わせたものに $N!$ をかければ総和となるが、今は平均を考えているのでそのままよい

ところで

- $dp[x+1][y+k] += dp[x][y] / k * k^2$ という式は非常に単純に見えます
 - $dp[x+1][y+k] += dp[x][k] * k$ です
 - $dp[0][0] = 1$ としてdpテーブルを眺めてみます
- かなり一般項が求まりそうな形をしていますね

$dp[x][y]$	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	0	1	4	10
3	0	0	0	1	5

ところで

- 実は $dp[k][N] = \text{Comb}(N+k-1, 2k-1)$ です。
- $E[x]$ に関しても同様に $\text{Comb}(N-1, k-1)$ であることが分かります。
- よって、 $dp[k][N]$ を $O(1)$ で求める事が出来るので、 $O(N)$ で両者を計算する事が出来、答えを求める事が出来ました。