ICPC模擬地区予選2021

K: Zombie Land 2

原案: sumiken

問題文: riantkb

データセット: darsein

解答: darsein, hos, riantkb

解説: darsein

問題概要

- 2次元平面上に1人のゾンビとN人の人がいる
- ゾンビ、および人はそれぞれ初期位置 (x_i, y_i) から速度 (v_{xi}, v_{yi}) で動き続ける
- 人はゾンビの半径 D 以内に近づいてしまうと、ゾンビになってしまう
  - 以降このゾンビの半径D以内に近づいても人はゾンビになる
- 各人について、ゾンビになるタイミングを求めよ。
  - ゾンビにならない場合 -1 を出力
- 制約
  - $1 \leq N \leq 10^3$, $0 \leq D \leq 10^4$, $-10^4 \leq x_i, y_i, v_{xi}, v_{yi} \leq 10^4$

解法

- 2つのパートに分けて考える

1. (ゾンビと人を区別せず) 全ペアについて距離がD以内になる時間の区間を求める
2. 各人がゾンビになる最速時間を上記区間に基づいて求める

解法: 全ペア区間列挙

- 人 $(x_a, y_a, v_{xa}, v_{ya})$ と人 $(x_b, y_b, v_{xb}, v_{yb})$ の時間 t における距離 D_t について、
  $D_t^2 = ((x_a + v_{xa}t) - (x_b + v_{xb}t))^2 + ((y_a + v_{ya}t) - (y_b + v_{yb}t))^2$ が成り立つ

- 式を変形すると、
  $D_t^2 = (V_x^2 + V_y^2)t^2 - 2(XV_x + YV_y)t + X^2 + Y^2$
  ここで、$X = x_a - x_b$, $Y = y_a - y_b$, $V_x = v_{xa} - v_{xb}$, $V_y = v_{ya} - v_{yb}$

- よって、距離D以内になる時間 t は
  $(V_x^2 + V_y^2)t^2 - 2(XV_x + YV_y)t + X^2 + Y^2 \leq D^2$ を満たす

解法: 全ペア区間列挙

- $a = V_x^2 + V_y^2$, $b = -2(XV_x + YV_y)$, $c = X^2 + Y^2 - D^2$ とおくと、$at^2 + bt + c \leq 0$ の形でかけるため、二次方程式を解けばこれを満たす t の区間がわかる
    - $a = 0$ のときは $bt + c \leq 0$
        - $b = 0$ のとき $c \leq 0$ で $[-\infty, \infty]$、$c > 0$ で距離D以内になる区間なし
        - $b < 0$ なら $[-c/b, \infty]$、$b > 0$ なら $[-\infty, -c/b]$
    - $a \neq 0$ のときは $[-b - \sqrt{(b^2 - 4ac)} / 2a, -b + \sqrt{(b^2 - 4ac)} / 2a]$
        - ただし、$b^2 - 4ac < 0$のときは交点がない
          → ($a > 0$より下に凸なので) 距離D以内になる区間なし
- 上記の場合分け・計算は O(1) で可能 → 全ペアについて計算して全体で $O(N^2)$

解法: 最速ゾンビ化時間

- ゾンビ集合をZ、人集合をP、時間 $t = 0$ とおく
  - t までにまだゾンビではない人 $p \in P$ について、すでにゾンビになっている人たち Z と距離D以内になる時間のうち、t 以降で最速の時間 t_p をそれぞれ求める
    - 人 p とゾンビ z が距離Dになる時間を $[a, b]$ とすると、 t 以降で最速の時間 t_{pz} は $t \leq b$ のときのみ定義され、 $t_{pz} = \max(a, t)$
    - $t_p = \min_{z \in Z} \{t_{pz}\}$
  - Pのうち、最速でゾンビになる人をゾンビにして、時間を進める
    - $t = \min_{p \in P} \{t_p\}$ とおき、$P = P \setminus \{p\}, Z = Z \cup \{p\}$ と更新する

解法: 最速ゾンビ化時間

- このアルゴリズムを愚直に実装すると、集合Pのサイズが1つ増えるたび、P × Z について t_{pz} を求めるのに O(N^2)、サイズが増える回数が高々N回なので全体でO(N^3)

- 実際には集合Pのサイズが1つ増えるときに更新されるt_{pz}は、増えた人 p に関するもののみなので、高々N個の更新のみでよい。この更新の工夫により、全体でO(N^2)

  - O(N^2) ダイクストラの更新と同様

解法: まとめ

- 二次方程式を解いて全ペア区間列挙する: $O(N^2)$
- ダイクストラ法の要領でその時点以降最速でゾンビ化する人を順次求めていく: $O(N^2)$
- 全体でも$O(N^2)$
  - 区間計算は実際には前処理にする必要はなく、t_{pz}の更新時に求めても全体の計算量は変わらない

統計情報

- AC / trying teams
  - 20 / 24 (83.33%)
- First Acceptance
  - The atama (00:38)