

JAG Regional Practice Contest 2012

# 問題C: Median Tree

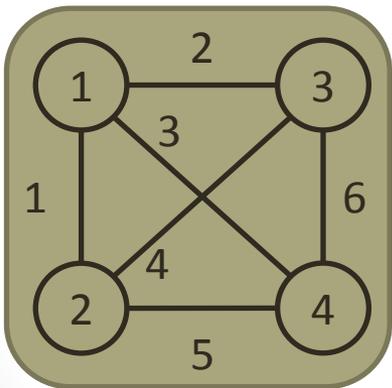
原案：岩田

解答：播磨・山口・青木

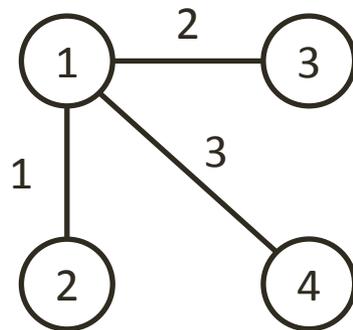
解説：青木

# 問題概要

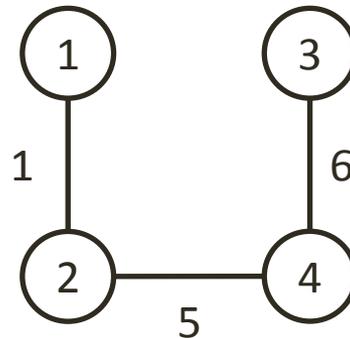
- グラフが与えられる
  - 重み付き
  - 連結
  - 偶数個の節点
  - 多重辺がない
- グラフの全域木の枝の重みの中央値の最小値は？



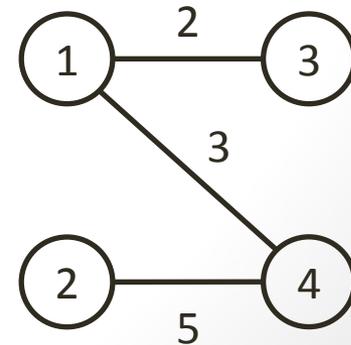
(1, **2**, 3)



(1, **5**, 6)



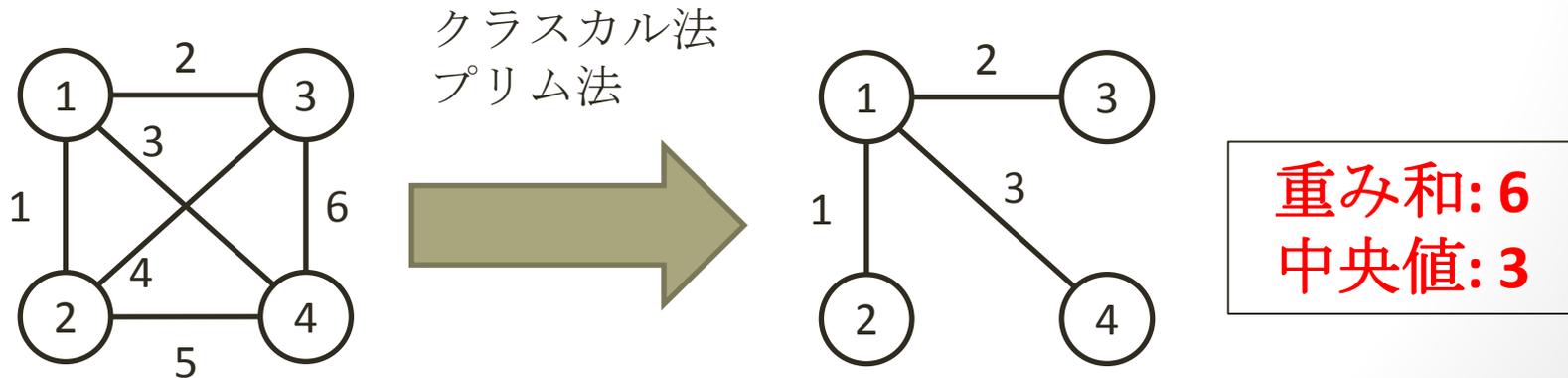
(2, **3**, 5)



...

# 解法

- **最少全域木 (MST)** の枝の重みの中央値が答え
  - 最小の枝からグリーディに接続 (クラスカル法)
  - $N/2$  番目に接続された枝の重みが中央値
- クラスカル法・プリム法で全域木を求める
  - $O(M \log N)$
  - 木の全列挙だと時間がかかりすぎる

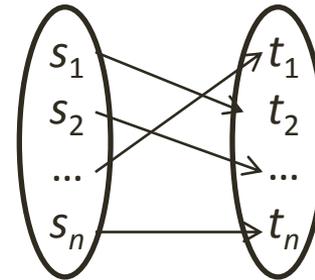


# 証明 (1/3)

- [定理] MST  $S$  と MST でない任意の全域木  $T$  について  
 $C(S \text{ の } N/2 \text{ 番目の枝}) \leq C(T \text{ の } N/2 \text{ 番目の枝})$
- [定義]
  - $S$  と  $T$  の共通部分を  $S$  と  $T$  それぞれから除き、
    - $S' = (s_1, s_2, \dots, s_n), s_i \leq s_{i+1}$
    - $T' = (t_1, t_2, \dots, t_n), t_i \leq t_{i+1}$とする
  - 枝  $e$  のコストを  $C(e)$  とする
  - $S \setminus s_x \cup t_y$  が全域木  $\rightarrow s_x$  と  $t_y$  が入替え可能と呼ぶ
    - $S$  から  $s_x$  を除き、 $t_y$  を接続すれば、全域木ができる

# 証明 (2/3)

- [補題1] 入替え可能な関係によって、 $S'$ の各枝は、 $T'$ の各枝との1対1の対応付けが可能



- [証明]
  - $G = S \cup T$ とする
  - $G$ から全橋を除いたグラフ  $G'$ の各連結成分  $G'_k$ について、
$$|S' \cap G'_k| = |T' \cap G'_k|$$
    - $S \cap G'_k$ および、 $T \cap G'_k$ は  $G'_k$ の全域木であるため
  - $G'_k$ の任意の  $s_x$ と任意の  $t_y$ は同じ閉路に存在し、入替え可能
    - $G$ の閉路全てに、1つ以上の  $S'$ の枝と  $T'$ の枝が存在するため
  - $S' \cap G'_k$ の各枝と  $T' \cap G'_k$ の各枝は過不足なく対応付け可能
  - $S'$ の枝から  $T'$ の枝への1対1の対応付けが可能 ■

# 証明 (3/3)

- [補題2] 枝の重みについて  $C(s_j) \leq C(t_j)$  が成り立つ
- [証明]
  - $C(s_j) > C(t_j)$  の存在を仮定
  - $C(s_n) \geq \dots \geq C(s_j) > C(t_j) \geq \dots \geq C(t_1)$  が成立
  - $(s_n, \dots, s_j)$  の少なくとも1つは、 $(t_j, \dots, t_1)$  と入替え可能
    - [補題1]と  $|s_n, \dots, s_j| \geq |t_j, \dots, t_1|$  であるため
  - この入替えによって、 $S$  よりも小さい全域木が作られる
    - $S$  が最小全域木であることに矛盾
    - 枝の重みについて  $C(s_j) \leq C(t_j)$  が成立 ■
- [補題2]より、 $C(S \text{ の } N/2 \text{ 番目の枝}) \leq C(T \text{ の } N/2 \text{ 番目の枝})$  ■

# ジャッジ解

- 播磨
  - プリム(C++) 1141 bytes
  - クラスカル(C++) 1547 bytes
- 青木
  - プリム(Java) 2474 bytes
  - クラスカル(Java) 3107 bytes

# 解答状況

- First Accept
  - hogloidさん (9:31)
- Accept / Submit
  - 51 / 102