

# Problem J

## Tile Puzzle

原案：野田

担当：平野，吉田，泉，松本

# 問題概要

- 7色に変化するタイルがグリッド状に並べられている。タイルは触れるたびに黒→赤→緑→黄→青→マゼンタ→シアン→黒→...と変化する。
- あるタイルに触れるとその周囲8方向のタイルの色も変化する
  - 左端と右端, 上端と下端はつながっているとする
- 初期状態ではすべてのタイルは黒とする。与えられた終状態に変化させるにはどのタイルに何回触れれば良いか

# 定式化

- ある種の連立一次方程式として定式化できる
  - A: タイル間の隣接関係を表す行列
  - x: 各タイルに触れる回数を表すベクトル
  - b: 各タイルの終状態を表すベクトル
  - 以上の変数を用いて,  $Ax = b \pmod{7}$
- 通常の連立一次方程式と違う点が二つ
  - mod 7 で等しければ良い
  - 解 x は整数ベクトルに限る

# 連立一次方程式

- 通常の連立一次方程式  $Ax = b$  はガウスの消去法で解くことができる
  - 知らない人は線型代数における重要な計算手法なので勉強してください。線型代数は遍く科学において重要です。
- 今回の連立一次方程式  $Ax = b \pmod{7}$  ( $x$ : 整数ベクトル)もガウスの消去法で解くことができる
  - なぜ？

# 体と線型代数

- 線型代数では実数または複素数の行列やベクトルを扱うことが多いが、実際には「体」というより広い対象の行列やベクトルを扱うことができる
  - 「体」とは平たく言えば加減乗除が定義できる対象のことである
  - 実数は「実数体」、複素数は「複素数体」と呼ばれる体の一種である
- 整数を mod  $p$  ( $p$ : 素数) で考えたものは  $GF(p)$  と書かれ、「有限体」という体の一種であり、線型代数で扱うことができる
  - この問題では  $GF(7)$  を扱うことになる
  - 有限体はコンピュータ科学において、符号化や暗号化の分野で重要な役割を果たしている

# GF(7)の加減乗除

- GF(7) では数は 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 7 個である
- GF(7) での加減乗除の仕方の例を示す
  - $3 + 6 = 2$  ( $9 = 2 \pmod{7}$ )
  - $2 - 4 = 5$  ( $-2 = 5 \pmod{7}$ )
  - $3 * 4 = 5$  ( $12 = 5 \pmod{7}$ )
  - $2 / 5 = 6$  ( $5 * 6 = 2 \pmod{7}$ )

除算がわかりにくい  
乗算の逆演算として定義している  
と考える

# $Ax = b \pmod{7}$ の解法

- 通常の実数上での連立方程式  $Ax = b$  を解くガウスの消去法のアルゴリズムを書く
- 実数上の加減乗除を  $GF(7)$  上での加減乗除に置き換える
- $Ax = b \pmod{7}$  を解くガウスの消去法のアルゴリズムができる

# まとめ

- 線型代数を勉強しましょう
- 有限体を勉強しましょう
- どちらも ICPC で出題されるだけでなく, コンピュータ科学を学ぶ上で重要な道具です. この機会に勉強して損はないでしょう.