Problem E:
Magical Island

Yusuke Izumi

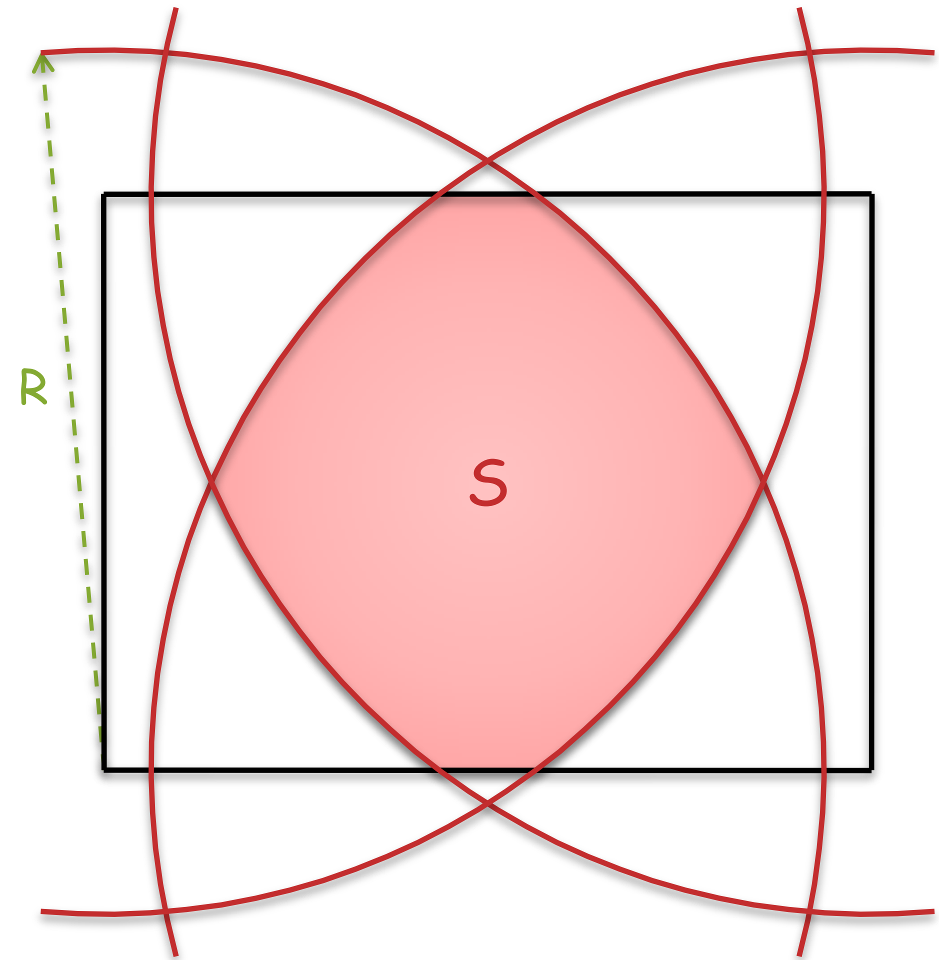
クレジット

- 原案
  - 松本
- 解答例
  - 牟田, 泉
- 入出力
  - 牟田, 泉
- 英文
  - 松本, 黄

問題概要

- 長方形の幅と高さが与えられる.
- 長方形の各頂点を中心とする半径 R の円を考える.
- 長方形の内部および 4 つの円の内部の全部に含まれる領域を安全領域という.
- 安全領域の面積が S 以上になるような半径 R の最小値を求めなさい.

参考図



提出概況

- 提出数
  - 8 (5 チーム)
- 正答数
  - 5
- 最初の正答
  - 70 min (______________)

解法

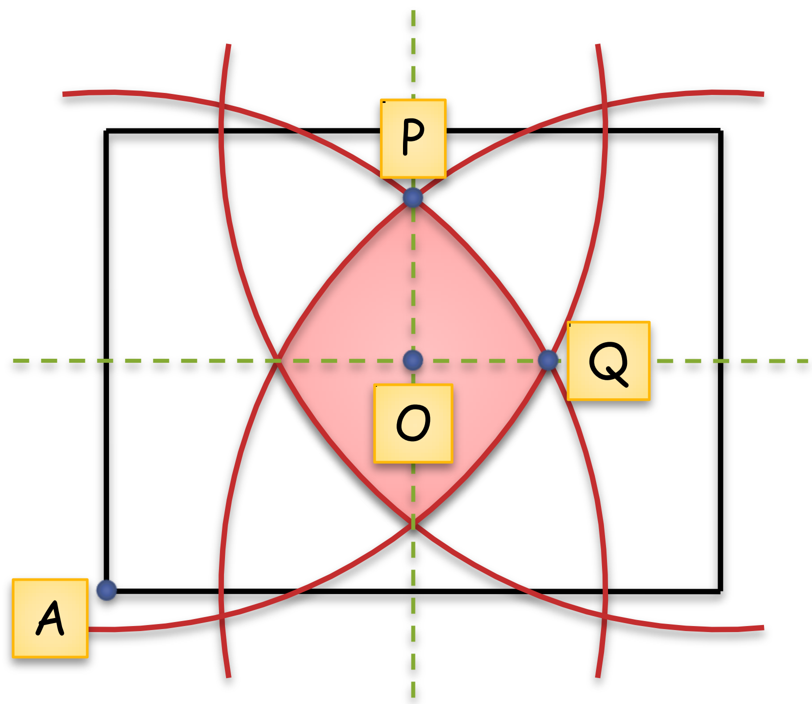
- R または R^2 に関する二分法.
  - 非線形方程式 Area(R) – S = 0 の解を求めることに相当する.
  - Area(R) は安全領域の面積をあらわす.
  - Area(R) は R に関する単調増加関数である.
- 対角線の長さを L とおくと, 求める R の値は範囲 (L/2, L] の中に存在する.
  - $R \leq L/2$ のとき, 安全領域は存在しない(またはただ一点だけが含まれる).
  - $R \geq L$ のとき, 安全領域は長方形の内部と一致する.

安全領域の面積(基本形)

- 図形は上下左右に対称なので，たとえば右上部分の面積だけを計算すればよい．
- 幅と高さを入れ替えても結果は等しくなるので，たとえば幅のほうが長いと仮定してよい．
- その上で，全部の円の共通領域と長方形との関係に応じて 3 通りに場合分けする．
  - 共通領域が長方形の枠内に入る場合
  - 共通領域が短辺方向に関して枠外に出る場合
  - 共通領域が長辺方向に関して枠外に出る場合
- 円同士の交点を基準に判断する．

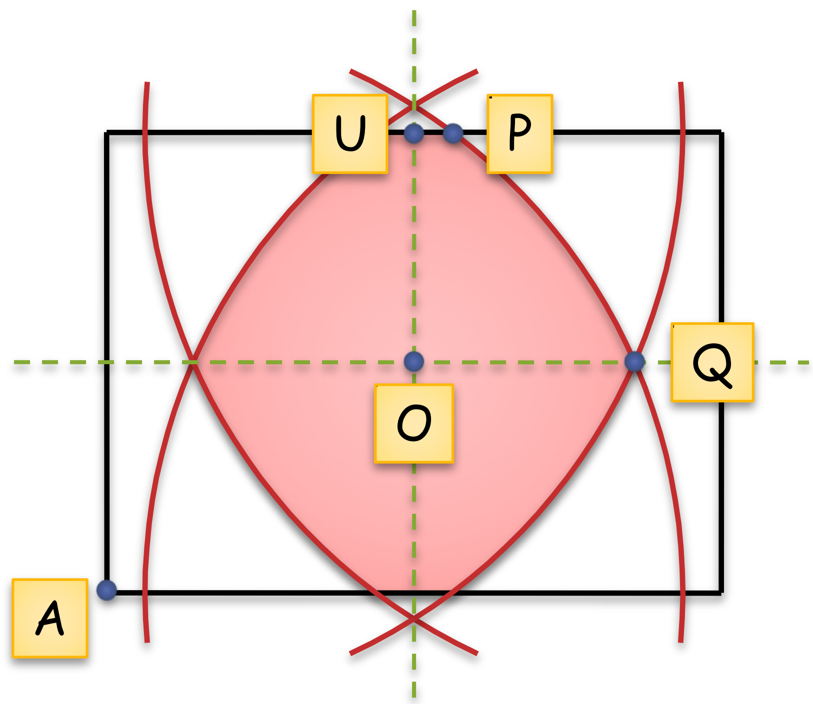
Case #1

$\underbrace{(\text{扇形 PAQ})}_{\substack{\parallel \\ \text{半径 R で中心角が}\angle\text{PAQ の扇形の面積}}} - \triangle PAQ + \triangle POQ$



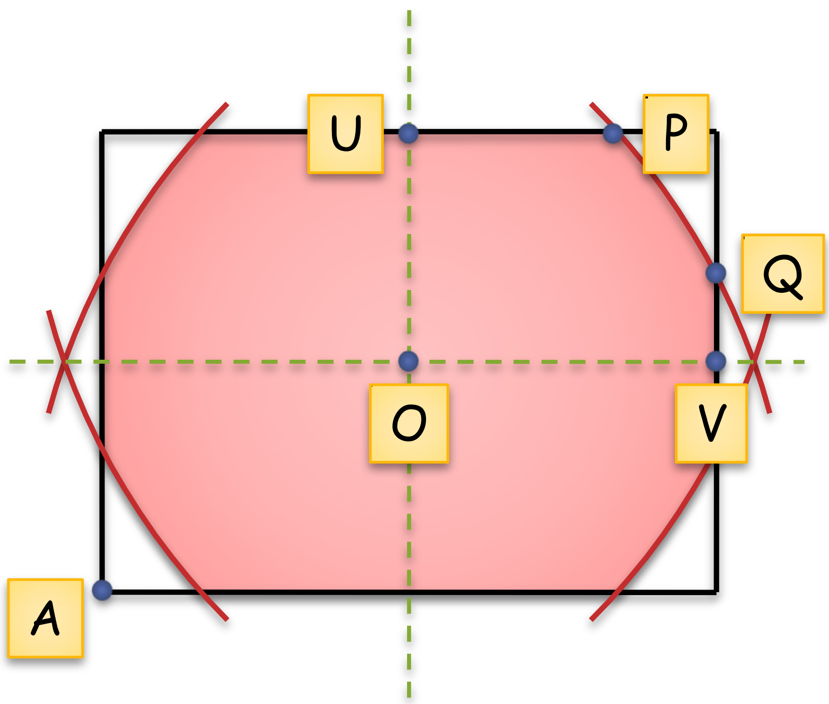
Case #2

(扇形 PAQ) – △PAQ + △POQ + △UOP



Case #3

(扇形 PAQ) – △PAQ + △POQ + △UOP + △VOQ



補足

- 実は Case #3 だけで十分である.
  - 円弧の端点を P, Q とおく.
  - 上側の辺の中点を U とおく.
  - 右側の辺の中点を V とおく.
  - このとき, Case #1 と Case #2 の場合では, △UOP および △VOQ にあたる部分が 0 になるので, 特別扱いをしなくて済む.