Headstrong Student

原案: 野田
解答:寺島,吉田,吉野
英訳: 吉野
解説: 吉田

解答状況

- Submitted: 53 (24 teams)
- Accepted: 20 teams
- First Accept: 15 (_____(andaasukoaazu))

問題概要

- x/y ($x<y$)を小数で表現したときの非循環部の桁数pと循環部の桁数qを求めよ。ただしx/yが有限小数の場合は$q=0$とみなす。

- 例:

$x/y=1/6=0.1666...$ $\Rightarrow (p,q)=(1,1)$

$x/y=3/5=0.6$ $\Rightarrow (p,q)=(1,0)$

$x/y=2/200=0.01$ $\Rightarrow (p,q)=(2,0)$

$x/y=25/99=0.2525\ldots$ $\Rightarrow (\mathrm{p},\mathrm{q})=(0,2)$

想定解(1)

- 実際に割り算をシミュレートしてみる。
- 現在の状態は”余り”で表現できる。
- 同じ”余り”に二度出会ったら循環があるということ。

例: x=25,y=99

最初の余りr_0=x=25とする

r_0*10=250=99*2…52 ⇒ r_1=52とする

r_1*10=520=99*5…25 ⇒ r_2=25とする

r_2とr_0が等しい。非循環部の長さp=0, 循環部の長さq=2。

想定解(1)の計算量

- 余りの種類は高々y種類。
- 割り算のシミュレートをyステップ行えば、鳩ノ巣原理から必ず二回同じ余りが現れる。
- よって計算量は$O(y)$になる。

想定解(2)

- 以下の性質が知られている。

定理: xとyを互いに素な整数とする。x/yの非循環部、循環部の桁数をそれぞれp,qとする。$y=2^a5^bQ$, $\gcd(Q,10)=1$と表すと次が成り立つ。

- $Q=1$の時、$p=\max(a,b)$, $q=0$
- $Q>1$の時、$p=\max(a,b)$, $q=(10(\mathrm{mod}\ Q)$の位数)

但し$10(\mathrm{mod}\ Q)$の位数とは$10^k=1(\mathrm{mod}\ Q)$となる最小のkのことである。

$10(\mathrm{mod}\ Q)$の位数が求まれば問題は解ける。

想定解(2)

- $\gcd(10,Q)=1$なのでフェルマーオイラーの定理から$10^{\varphi(Q)}=1 \pmod{Q}$が成り立つ（$\varphi(Q)$は$Q$未満で$Q$と互いに素な数の個数）。
- $\varphi(Q)$の計算は簡単。
- $\varphi(Q)$が$10^k=1 \pmod{Q}$を満たす”最小”のkかどうかは分からない。しかし”最小”のkが$\varphi(Q)$の約数であることは証明出来る(Exercise!)。

- なので$\varphi(Q)$の約数dを全て列挙して$10^d=1 \pmod{Q}$になるかどうか調べれば良い。

想定解(2)の計算量

- $\varphi(Q)$の計算: $O(Q^{1/2})$時間
- dが$10^d=1 \pmod{Q}$を満たすかのチェック: $O(\log d)$時間
- $\varphi(Q)$の約数の数は高々$\varphi(Q)^{1/2}$個

- 全体の計算量は:
  $O(Q^{1/2}+\varphi(Q)^{1/2}\log d)=O(Q^{1/2}\log Q)=O(y^{1/2}\log y)$時間
- 想定解(1)と比べ高速。