

Revenge of the Round Table

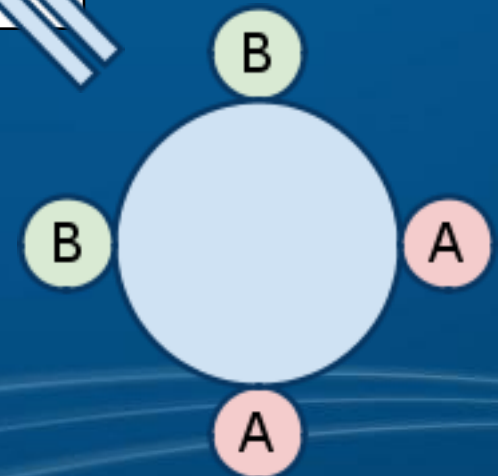
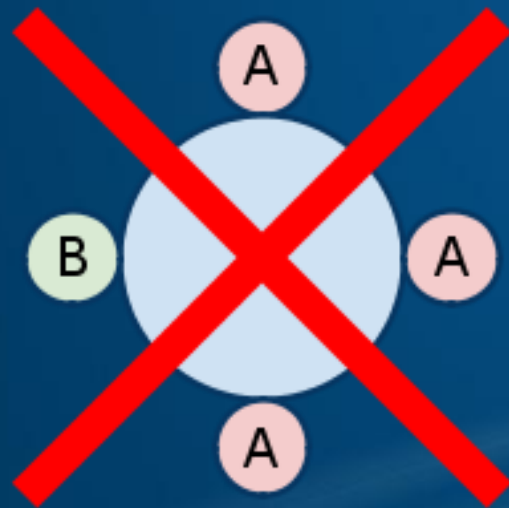
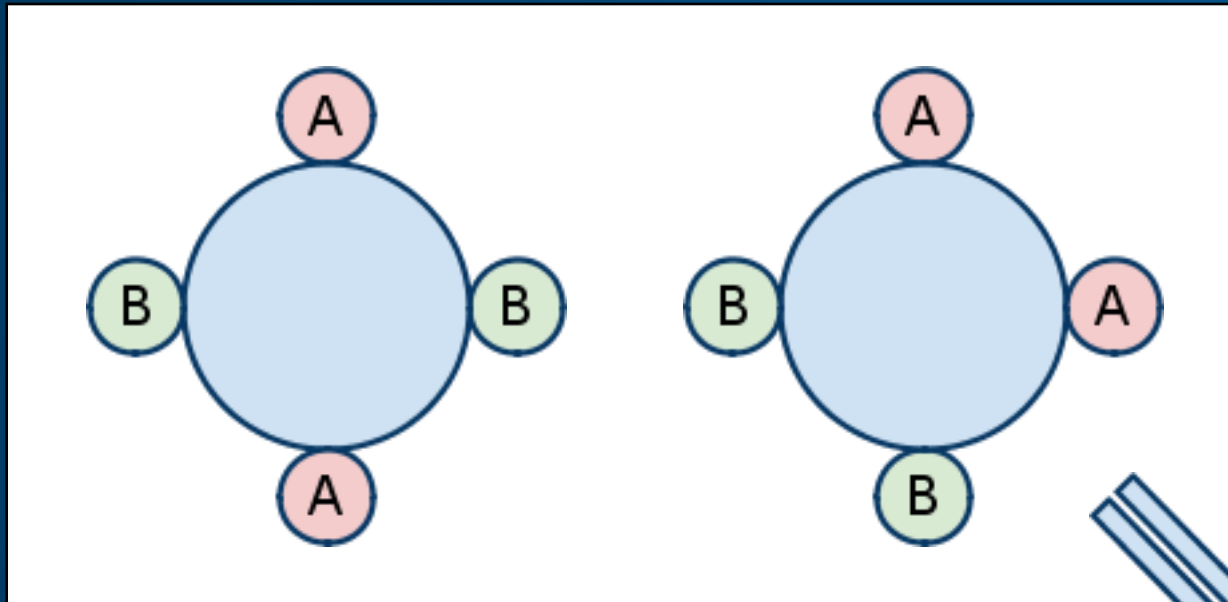
原案: oxy, 解答: oxy, hmuta

Problem

- A国とB国の人が会議をする
- 円卓に n 人座る
- 同じ国の人 $k+1$ 人以上並んでいたらダメ
 - k -freeと呼ぶことにする
- ユニークな座り方は何通りあるか？

Example

$n=4, k=2$



Take It Easy!

- 問題を緩和して簡単にして解いてみる
- たとえば、
 - 回転したものも数えることにする
 - そもそもループしていない普通の列にして考える
- 一般に、難しい問題にあたったら、特殊ケースや条件を緩和した問題を考えると足がかりが掴めるかも

Subproblem 1

- 長さ n の k -free 文字列の数を求めよ
- 文字列の最初と最後はループしていない

$n=4, k=2$ の場合

- AABA
- AABB
- ABAA
- ABAB
- ABBA
- BBAB
- BBAA
- BABB
- BABA
- BAAB

Subproblem 1 - Basic Observations

- Aから始まる文字列を求めれば、Bから始まる文字列はそのABを反転したもの
- よって、Aから始まるものだけ数えればよい

$n=4, k=2$ の場合

- | | |
|--------|--------|
| • AABA | • BBAB |
| • AABB | • BBAA |
| • ABAA | • BABB |
| • ABAB | • BABA |
| • ABBA | • BAAB |

Subproblem 1 - DP

- 列の長さについてDPしよう！
- 同じ文字が $k+1$ 個以上続いてはいけない
-> 最後に使った文字が何文字続いているか
記録する (2次元DP)
- $dp1A[n'][s] :=$ Aから始めてBAsで終わる
長さ n' の k -free文字列の数
- $dp1B[n'][s] :=$ Aから始めてABsで終わる
長さ n' の k -free文字列の数
-> $dp1A[n'][1] = \sum_{l=1..k} dp1B[n'-1][l]$
 $dp1A[n'][s] = dp1A[n'-1][s-1]$

Subproblem 2

- 長さ n の k -free 文字列の数を求めよ
- 文字列の最初と最後がループしている
 - ループして同じ文字が k 個続いてもアウト
 - k -free with loopと呼ぶ

$n=4, k=2$ の場合

- | | |
|--------|--------|
| • AABB | • BBAA |
| • ABAB | • BABA |
| • ABBA | • BAAB |

(問題文に書いてある6つ)

Subproblem 2 - DP

- やはり最初はAとしてよい
- $dp2[n'] :=$ 長さ n' でAから始まる k -free with loopな文字列の数
 - Bで終わる文字列は全て k -free with loop
 - $A^p B$ で始まりAで終わるような k -free with loopな文字列の数は?
 - $\sum_{l=1..(k-p)} dp1B[n-p][l]$
- $dp2[n'] = \sum_{s=1..dp1B[n'][k]} + \sum_{p=1..k} \sum_{l=1..(k-p)} dp1B[n-p][l]$

Review Original Problem

- 長さ n の k -free 文字列の数を求めよ
- ループしている
- 回転して同じになる文字列は重複して数えない!

$n=4, k=2$ の場合

- AABB
- ABAB

- AABB
- ABBA
- BBAA
- BAAB

- ABAB
- BABA

Original Problem - Rank

- Subproblem 2で求めた文字列を最小の繰り返し単位の長さで分類する -> rank
- rank 2の文字列は2個、rank 4の文字列は4個だけ回転同値な文字列が存在する
- rank Rのものを数えてRで割ればいい！

n=4, k=2の場合

- AABB
- ABAB

- AABB
- ABBA rank 4
- BBAA
- BAAB
-
- ABAB
- BABA rank 2

Subproblem 3

- 長さ n の k -free with loop 文字列で、rankが R のもの の数を求めよ

Subproblem 3 - DP

- $dp3[n'] :=$ 長さ n' で rank n' な k -free with loop 文字列の数
 - i.e. より細かい繰り返し単位を持たない
- $dp3[n'] := dp2[n'] - \sum_{1 < d < n'; n' \mid d} dp3[d]$

Answer

- $\text{ans} = \text{dp3}[n]$
- $\text{dp3}[n'] := \text{dp2}[n'] - \sum\{1 < d < n'; n' \mid d\} \text{dp3}[d]$
- $\text{dp2}[n'] = \sum_{s=1..k} \text{dp1B}[n'][s] + \sum_{p=1..k} \sum_{l=1..(k-p)} \text{dp1B}[n-p][l]$
- $\text{dp1A}[n'][1] = \sum_{l=1..k} \text{dp1B}[n'-1][l]$
- $\text{dp1A}[n'][s] = \text{dp1A}[n'-1][s-1]$
- $\text{dp1B}[n'][1] = \sum_{l=1..k} \text{dp1A}[n'-1][l]$
- $\text{dp1B}[n'][s] = \text{dp1B}[n'-1][s-1]$

Notes

- modulo 1000003
 - 1000003は素数なので割り算が定義可能
- $k \geq n$ のとき
 - $k := n-1$ として求めた答え+2 (A_n と B_n の分)

Submission Status

- Submissions: 2/4
- Teams Tried: 2
- Accepts: 2
- First Accept: (ry (108min.)