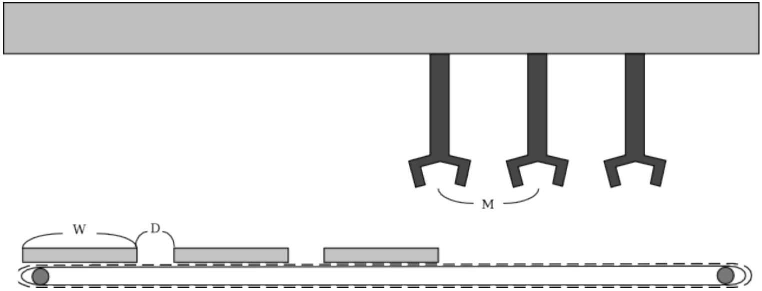
Tampopo Machine

原案: 野田
解答: 北川, 關戸
解説: 北川

問題概要

- 下図のように左から速さ 1 で刺身のパッケージが流れてくる
- T 秒毎に N 個のマジックハンドがパッケージにタンポポを乗せる
- タンポポが乗らないパーケージの割合を求める



式で表す

- kT 秒過ぎたときの i 番目にあるパッケージの位置は $kT-(W+D)i-W$(左端) から $kT-(W+D)i$(右端)
- $j(0 \leq j < N)$ 番目にあるマジックハンドの位置は jM
- i 番目のパッケージにタンポポが乗るための条件は $kT-(W+D)i-W \leq jM \leq kT-(W+D)i$ となる $0 \leq k$ と $0 \leq j < N$ が存在すること

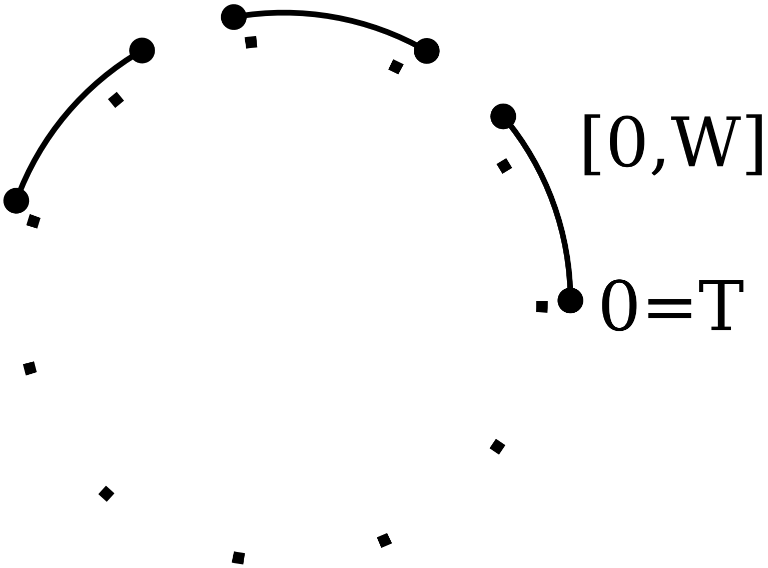
周期性

- 割合なので $0 \leq i$ と $0 \leq k$ の条件ははずして考えていい
- 式を見ると i 番目にタンポポが乗るかは $(W + D)i \mod T$ の値にしかよらない

いいかえ

- $d = \gcd(W + D, T)$ とおく
- $\mathrm{mod}\,T$ での区間を $[a, b] = \{i \mod T | a \le i \le b\}$ と書くことにする
- $jM \in [di - W, di]$ となる $0 \le j < N$ が存在するような $0 \le i < T/d$ の個数を考える問題になった
- さらに式変形すると $di \in [jM, jM + W]$ となる
- これで、$\mathrm{mod}\,T$ での区間の合併 $\bigcup_{0 \le j < N} [jM, jM + W]$ に含まれる d の倍数を数える問題になった

イメージ



$d = 1$ の場合

- まず、$d = 1$ の場合を考える
- 区間が一つならその中に含まれる元の個数は簡単に計算できる
- たくさん区間があるのでまとめて処理したい
- j を 0 から増やしていきながら、それ以前の区間によって覆われていない元を数えていく
- j が小さいところでは、それ以前に出てきた区間と交わらないので、増える個数は $W + 1$ 個
- 増える個数が変わるタイミングは?

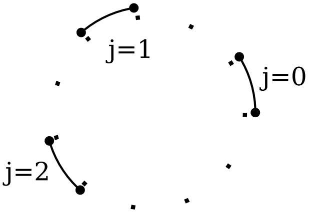


図: 一つの区間ごとに 2 つずつ増える

増える個数が変わるタイミング

- 増える個数が変わるのは、前の区間と交わりを持つ場合
- i 番目と $j(i < j)$ 番目が交差するなら 0 番目と $j - i$ 番目が交差する
- よって、増える個数が変わるタイミングは 0 番目と交差したとき
- $[0, W]$ と $[jM, jM + W]$ が交わる最小の j を j_0 としておく
- j_0 の求め方は後述

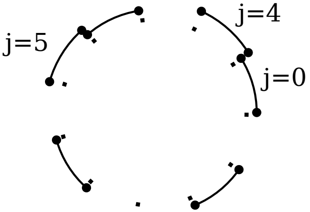


図: $j = 4$ からは 1 つずつ増える

増える個数が変わるタイミング 2

- j_0 からは、また一定の個数で増加していく
- 増える個数が変わるのは、0 番目と交わり、j_0 番目とは交わらないとき (下図)
- これを j_1 とする

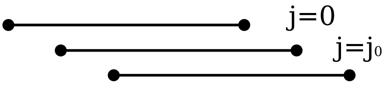


図: 増える個数は変化しない

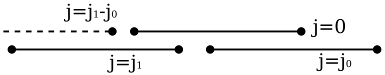


図: 増える個数は変化する

j_1 以降

- j_1 以降は全体を覆いつくすまで、一定の個数で増加していく
- $j = N - 1$ まで計算して、T を超えていたら T にする

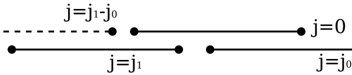


図: 0 番目と $j_1 - j_0$ 番目がつながる

$d \neq 1$ の場合

- $d = 1$ の場合は $[0, j_0), [j_0, j_1), [j_1, N)$ の間では一定の個数で増加していた
- $d \neq 1$ の場合はそうとは限らない
- $[jM, jM + W]$ と $[j'M, j'M + W]$ に含まれる d の倍数の個数が等しい区間を同時に処理したい
- $jM \equiv j'M \pmod d$ のとき、$[jM, jM + W]$ と $[j'M, j'M + W]$ に含まれる個数は等しい
- $jM \mod d$ の個数は d 以下なので、d が小さいときは一つずつ計算できる

d が大きい場合

- d が大きい場合は T/d が小さい
- 区間の中に入っているか判定したい元は T/d 個なので一つずつ判定したい
- 各 $0 \leq i < T/d$ に対して $di \in [jM, jM + W]$ となる $0 \leq j < N$ が存在するかを判定すればいい

j_0, j_1 の求め方と $di \in [jM, jM + W]$ の判定

- $di \in [jM, jM + W]$ を変形すると $jM \in [di - W, di]$ となる
- j_0 はなにかというと $[0, W] \cap [j_0M, j_0M + W] \neq \emptyset$ なので、変形すると $j_0M \in [-W, W]$ になる
- どちらも同じ問題に帰着された (j_0 のほうは最小値を求める必要がある)

$jM \in [a,b]$ となる j を求める

- 適当な大きさの整数 L をとっておく (あとで計算量を最小にするように L をとる)
- $j = xL + y (0 \le y < L)$ と表すと $jM \in [a,b]$ は $yM \in [a - xL, b - xL]$ になる
- あらかじめ $yM (0 \le y < L)$ を計算してソートしておけば、x を固定したときにこのような y が存在するかは二分探索すれば求まる
- 最小値も RMQ などを使えばいい (又はさらに二分探索してもできる)
- 参考 Baby-step giant-step

計算量

- 計算量が小さくなるように d の場合分けの値と、L を決めたい
- j_0, j_1 を求める計算量は $O(L + N/L \log(L))$
- d が大きい場合の計算量は $O(L + T/d \times N/L \log(L))$ なので $L = \sqrt{T/d \times N}$ くらいにすると、$O(\sqrt{T/d \times N})$ になる
- d が小さい場合の計算量は $O(L + N/L \log(L) + d)$ なので $L = \sqrt{N}$ にすると、$O(\sqrt{N} + d)$ になる
- よって全体の計算量は $O(\min(\sqrt{N} + d, \sqrt{T/d \times N}))$ になり、$d = (NT)^{1/3}$ くらいにすると $O((NT)^{2/3})$ になる

注意

- $j_0 M \equiv 0 \pmod{T}$ となる場合は j_1 まで計算する必要はない
- $W + 1 >= T$ の場合は常に 0
- $2W >= T$ のときは 0 番目の区間と j_0 番目の区間が 2 箇所で交差する場合がある

結果

- First submission: _
- Number of submissions: **2**
- Number of accepted: **0**