C. Usagitobi

出題: 保坂
解答: 保坂
解説: 保坂

問題概要

- (mod m) × (mod n) の世界
  - (Z/mZ) × (Z/nZ)
- (0, 0) からスタートして, +(a, b) と +(c, d) ができる
- 同じ場所には行けない
- 最大何回移動できるか

- m, n ≦ 100,000

実験

- $(a, b) = (1, 0), (c, d) = (0, 1)$ だったら…？
  - $+(a, b)$ ができる限りそうする
  - $+(a, b)$ できないときのみ $+(c, d)$
  - すると mn 点すべて行ける

- 一般の場合に同様の戦略をとったら？
  - 最大になりそう？

想定解法

- 行く可能性のある点の集合は
  S = { s (a, b) + t (c, d) }

想定解法

- 行く可能性のある点の集合は
  $S = \{ s (a, b) + t (c, d) \}$

- $e (a, b) = (0, 0)$ となる最小の $e > 0$ により,
  $S = \{ s (a, b) + t (c, d) \mid 0 \leqq s < e \}$

想定解法

- 行く可能性のある点の集合は
  $S = \{ s(a, b) + t(c, d) \}$

- $e(a, b) = (0, 0)$ となる最小の $e > 0$ により,
  $S = \{ s(a, b) + t(c, d) \mid 0 \leqq s < e \}$

- $f(c, d) = g(a, b)$ となる最小の $f > 0$ により,
  $S = \{ s(a, b) + t(c, d) \mid 0 \leqq s < e, 0 \leqq t < f \}$

想定解法

- $S = \{ s\,(a, b) + t\,(c, d) \mid 0 \leqq s < e,\ 0 \leqq t < f \}$

- s, t が異なるならば s (a, b) + t (c, d) は異なる
  - e, f の最小性より

想定解法

- $S = \{ s(a, b) + t(c, d) \mid 0 \leqq s < e, 0 \leqq t < f \}$

- s, t が異なるならば s (a, b) + t (c, d) は異なる
  - e, f の最小性より
- ということは,「+(a, b) ができる限りそうする」という戦略で S の元をすべてたどれる
- 答えは $|S| - 1 = ef - 1$

- e, f を求めよう

e の求め方

- sa は m / gcd(a, m) ごとに 0 になる
- sb は n / gcd(b, n) ごとに 0 になる

- ということで,
  e = lcm(m / gcd(a, m), n / gcd(b, n))

f の求め方 1

- ef ≦ mn に注意
- e ≦ √mn のとき
  - f (c, d) = g (a, b) となる g として, 0 ≦ g < e のみ考えればよい
  - g を決めれば f の最小値は連立合同式を解けば求まる
- e > √mn のとき → f < √mn
  - f を 1 から順に試して g が存在するか試せばよい
- O(√mn log mn)

f の求め方 2

- S は (Z/mZ) × (Z/nZ) の部分群
- よって ef は mn の約数
- f の候補はせいぜい O(√mn) 通り
- あとは同様

別解

- _
- ############

別解 (追加スライド 1)

- Z^2 の元であって, (a, b), (c, d), (m, 0), (0, n) の線形結合で書けるものは m × n あたりいくつ存在するか？ という問題として考える

別解 (追加スライド 2)

- 事実 (1)
  (a, b), (c, d), (e, f) の線形結合で書けるものの集合 { s (a, b) + t (c, d) + u (e, f) } は, ある (A, B), (C, D) により, { v (A, B) + w (C, D) } として書ける
  - つまり, 平行四辺形の格子上に並ぶ (退化する場合もある)
  - 証明は, 1 次元上に並ばないときは (A, 0) が入る最小の A > 0 をとって, (C, D) が入る最小の D > 0 をとって, 最小の C をとって, という感じ

別解 (追加スライド 3)

- 事実 (2)
  事実 (1) のように (A, B), (C, D) をとると,
  |AD - BC| = gcd (|ad - bc|, |af - be|, |cf - de|)
  が成り立つ
  - 格子をなす平行四辺形の面積の関係
  - 証明は, (a, b), (c, d) のなす格子, (a, b), (e, f) のなす格子, (c, d), (e, f) のなす格子, のうちの各 2 つが重なる点の条件を書いてみるとできる

別解 (追加スライド 4)

- 事実 (1), (2) を 2 回適用すれば 4 元の線形結合についても同様
- { v (A, B) + w (C, D) } の元は, Z^2 において, "|AD - BC| 個に 1 個" 存在
- m × n の中にも |AD - BC| 個に 1 個存在
  - 格子の模様は少なくとも m × n ごとには繰り返す
- よって, (a, b), (c, d), (m, 0), (0, n) の各 2 つがなす平行四辺形の面積たちの gcd をとり, それで mn を割れば |S| が求まる

結果

- 正解 / 提出: 2 / 6
- 提出チーム: 2 / 8
- 正解チーム: 2 / 8
- 最初の提出: _ (01:17)
- 最初の正解: _ (01:17)