

問題H: Ropeway 解説

原案: 野田

解答: 岩田、八森

英文: 泉、菅原

解説: 八森

概要

- ⑧ 重さ m_i ($1 \leq m_i \leq 100,000$) の重りが N 個 ($1 \leq N \leq 100$)、長さ L ($2 \leq L \leq 100,000$) のロープ、重りを置けないロープの中心からの距離 R ($1 \leq R \leq \frac{L}{2}$)、 M ($1 \leq M \leq 10,000$) が与えられる。
- 以下の式を満たしつつ、重りを決められた順番にすべて置けるか判定せよ。

$$\left| \sum_{i=0}^{N-1} m_i x_i \right| \leq M$$

解法

◎ 基本方針

- ・ テーブル(何番目の重りを置くか, $\sum m_i x_i$) のDP

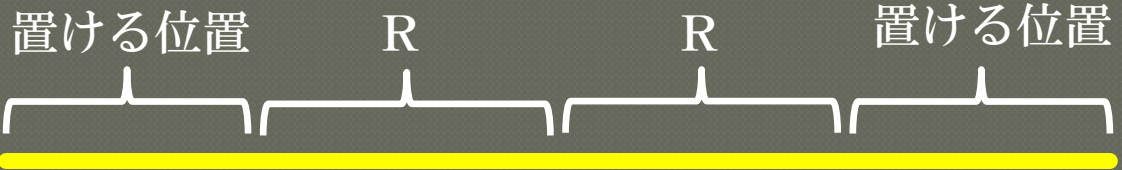
(何番目の重りを置くか, $\sum m_i x_i$)のDPをするにあたって

- ⑧ 「 $\sum m_i x_i$ は連続値だからDPは無理じゃない？」
- $\sum m_i x_i$ のとりうる値の範囲の端点は0.5の倍数
 - x_i がとる範囲は $-\frac{L}{2} \leq x_i \leq -R$, $R \leq x_i \leq \frac{L}{2}$ で、
この範囲の端点 $-\frac{L}{2}$, $-R$, R , $\frac{L}{2}$ は0.5の倍数。
 m_i は整数なので、 $\sum m_i x_i$ のとりうる値の範囲の端点は0.5の倍数。
- また、 $|\sum m_i x_i| \leq M$ が制約となることから、
 $-M \leq \sum m_i x_i \leq M$ であり、その中で0.5の倍数だけを考えるとよい。
 - 考える値は $-M, -M + 0.5, -M + 1.0, \dots, M - 1.0, M - 0.5, M$
 - $4M + 1$ 個の離散的な値として考えることができる！

(何番目の重りを置くか, $\sum m_i x_i$)のDPをするにあたって

- ⑧ 「 $\sum m_i x_i$ のとりうる値の範囲の端点でどんなDPをするの?」
- $\sum m_i x_i$ のとりうる値の範囲の端点に対し、重りを置いてモーメントを{時計回り|反時計回り}方向へ{最小|最大}に変化させ、 $\sum m_i x_i$ のとりうる値の範囲を広げてゆくDPを行う!

DPのイメージ



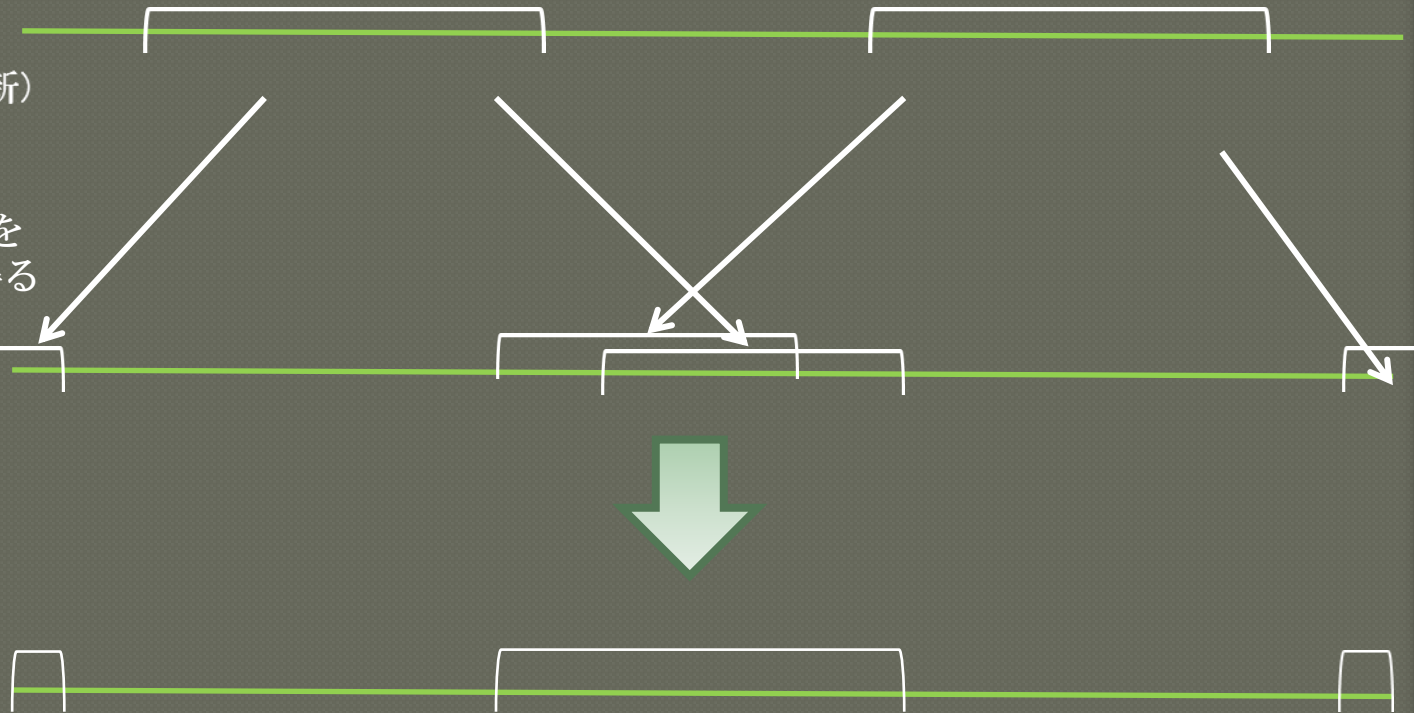
ロープの全長 & 置ける位置

置ける位置に, 1個目の重りを置いた時にとり得る力のモーメントの範囲
(テーブルは端点のみ更新)
(範囲は $-M$ から M の間)

上に続き, 2個目の重りを置こうとした時にとり得る力のモーメントの範囲

上の整形:

- M の制約
- 範囲の重複



重りをすべて置いた時に, とり得る力のモーメントの範囲が残っていたらYes

dpテーブル更新式

dp(何番目の重りを置くか(変数名:wId), $\sum m_i x_i$ (変数名:sum))
がtrueなら、以下のようにしてdpテーブルを更新する。

```
maxAdd = L*weight[wId]*0.5; // 重りをロープの端に置いた時のモーメント変化分  
minAdd = R*weight[wId];    // 重りをロープの位置Rに置いた時のモーメント変化分
```

// 時計回り方向にモーメントを変化させる

```
if(sum+minAdd<=M){ // -M ≤ ∑ mixi ≤ M の制約を満たすか判定  
    dp(wId+1,min( M,sum+maxAdd)) = true;  
    dp(wId+1,      sum+minAdd) = true;  
}
```

// 反時計回り方向にモーメントを変化させる

```
if(sum-minAdd>=-M){ // -M ≤ ∑ mixi ≤ M の制約を満たすか判定  
    dp(wId+1,max(-M,sum-maxAdd)) = true;  
    dp(wId+1,      sum-minAdd) = true;  
}
```

計算量

◎ 状態数

- ・ 重りの数 * 制約を満たす $\sum m_i x_i$ のとり得る範囲
→ $O(N * (4 * M + 1))$
→ $O(4,000,100)$

◎ 一つの状態に対する計算量

- ・ $O(4)$
 - ・ 時計回りへモーメントを最小に変化させる
 - ・ 時計回りへモーメントを最大に変化させる
 - ・ 反時計回りへモーメントを最小に変化させる
 - ・ 反時計回りへモーメントを最大に変化させる

◎ 計算量

- ・ $O(4,000,100) * O(4)$
≒ 16,000,000

結果

- ◎ Submission: 35
- ◎ Accept: 7
- ◎ First Accept: USAGI Code(1:41)

謝辞

- このスライドの説明文は、wata_orzさん、miracさんの説明を参考に作りました(勝手にですが)。
- とてもわかりやすい説明ありがとうございました。