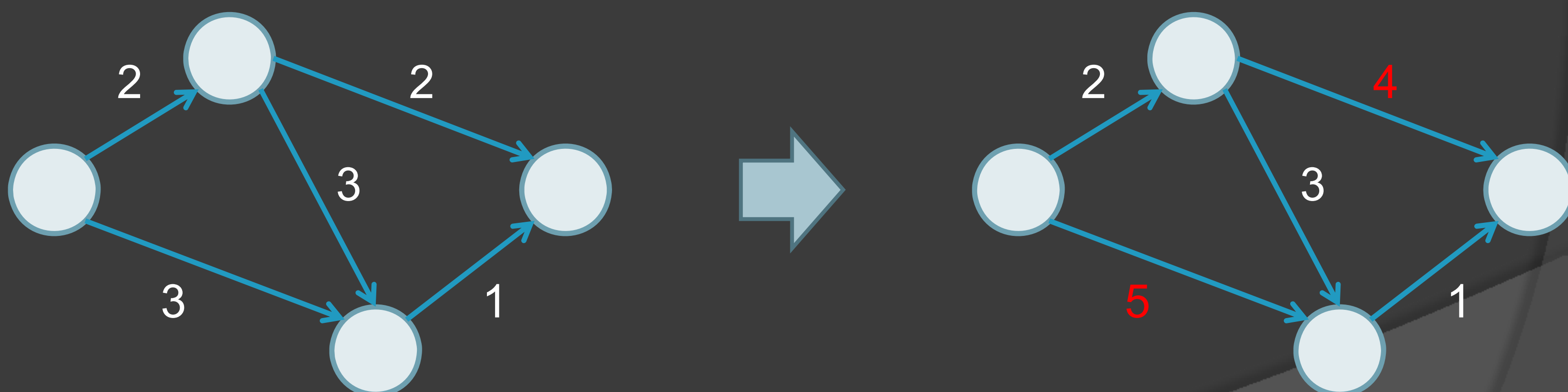
I: How to Create a Good Game

原案: 野田
解答作成: 岩田, 野田
問題文作成: 早坂
解説: 岩田

問題概要

- DAGの最長路の長さを保ったまま、辺の重みを増やし、増加分の和を最大化せよ



解法 - DAGの最長路

- DPで行えます
- d(v): sからvへの最長路の長さ
- d(s)=0
- d(v)=max{d(u)+cost(e) | e=(u,v)∈E}

- 特に、
  d(v)≧d(u)+cost(e)+add(e) (e=(u,v)∈E)
  が成り立ちます

解法1 (単体法)

- 初期状態でのsからtへの最長路の長さをD、辺に加える重みをaddとすると、以下のような整数計画問題になる

- maximize $\Sigma \mathrm{add}(e)$
- $d(t) \leqq D$
- $d(v) \geqq d(u)+\mathrm{cost}(e)+\mathrm{add}(e) \quad (e=(u,v) \in E)$
- $d(v), \mathrm{add}(e) \geqq 0$

解法1 (単体法)

- 実は整数制約を外してLPとして解いても同じ解が得られる(完全ユニモジュラー)
- 変数が|V|+|E|個、制約式が|E|個くらい
- とても大きいけど、そこそこ高速な単体法なら間に合うかも

解法2 (最小費用流)

- なんとなくフローっぽいので双対LPを考えてみます

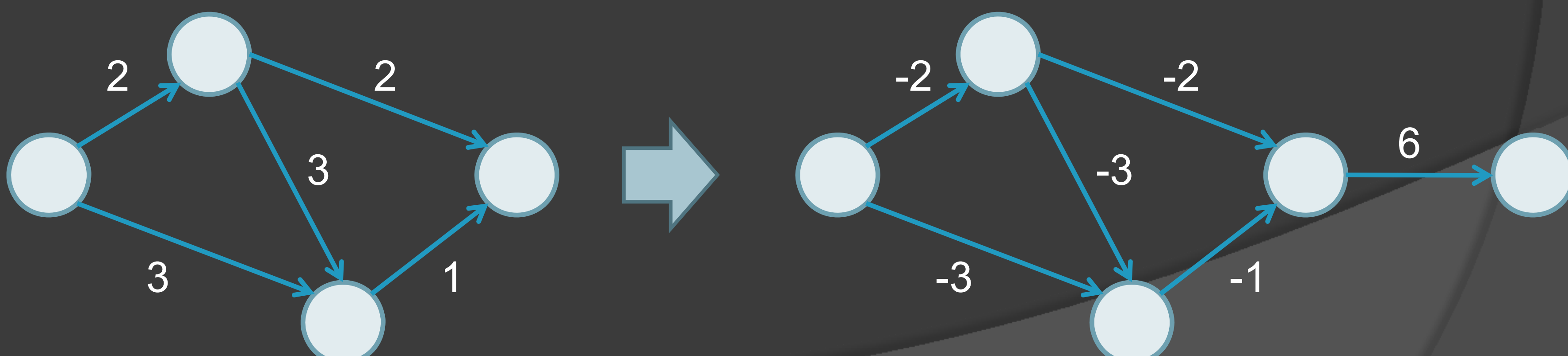
- 主LP: max{cx | Ax≦b, x≧0}
- 双対LP: min{yb | yA≧c, y≧0}

解法2 (最小費用流)

- minimize DT-Σcost(e)f(e)
- T-Σ_{e=(*,t)}f(e)≧0
- Σ_{e=(v,*)}f(e)-Σ_{e=(*,v)}f(e)≧0 (v≠t)
- f(e)≧1
- T≧0

解法2 (最小費用流)

- つまり、新たに終点t'を付け加え、各辺の重みを-1倍、tからt'に重みDの辺を付け加えたグラフに対して、各辺の流量が1以上となるような流量下限付き最小費用流を求めれば良い



解法2 (最小費用流)

- 流量の下限は簡単に取り除けます
- 辺e=(u,v)のコストがc, 最小流量がL, 最大流量がUの場合、eの最大流量をU-Lに減らし、uからvへ最大流量L、コストc-∞(十分大きな定数)の辺を付け、最後に∞Lを加えると普通の最小費用流になる

結果

- Submitted: 4
- Accepted: 0
- First Submitted: .Watch (184min)
- First Accepted: 該当なし