Cruel Bingo

原案: 野田
解答: 北川
解説: 北川

問題概要

- K 箇所穴の開いた $N \times N$ のビンゴカードが与えられる
- 与えられた状態から初めて, なり得る最悪 (「ちょうど N 箇所穴が開いていない」かつ「ビンゴになっていない」) パターンの数を計算する

解法

大体 3 通りの解法がある

- ビット DP
- 包除原理+DP
- 包除原理のみ

包除原理+DP と包除原理のみの解法を解説する

包除原理

$B(S,T)$ で S に穴が開いていて,T に一つも穴が開いていない終状態の数とする
穴の開いているマスの集合を S とすると, 包除原理から

$$B(S,\emptyset) = \sum_{T\subset S}(-1)^{|T|}B(\emptyset,T)$$

となる
$B(\emptyset,T)$ を計算できればいい

$B(\emptyset, T)$ を DP で計算する

- N が奇数のときを考える (偶数でもほぼ同じ)
- $dp[i][j][D]$ = (中心の $(2i + 1) \times (2i + 1)$ の正方形までで j 個の穴が開かずに残っているパターンの数) とする (D は 2 つの対角線上に穴が開かずに残っているものがあるかの 2 ビット)

		0		

$B(\emptyset, T)$ を DP で計算する

- N が奇数のときを考える (偶数でもほぼ同じ)
- $dp[i][j][D]$ = (中心の $(2i+1)\times(2i+1)$ の正方形までで j 個の穴が開かずに残っているパターンの数) とする (D は 2 つの対角線上に穴が開かずに残っているものがあるかの 2 ビット)

	1	1	1	
	1	1	1	
	1	1	1	

$B(\emptyset, T)$ を DP で計算する

- N が奇数のときを考える (偶数でもほぼ同じ)
- $dp[i][j][D]$ = (中心の $(2i+1) \times (2i+1)$ の正方形までで j 個の穴が開かずに残っているパターンの数) とする (D は 2 つの対角線上に穴が開かずに残っているものがあるかの 2 ビット)

2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2
2	2	2	2	2

漸化式

- $i \to i+1$ で変化するのは図の × の部分
- × の部分に $k (0 \le k \le 6)$ 個穴を開けずに残す場合の数は適当に計算できる
  - 場合分けが多いので前処理で列挙しておく
  - $T \ni p$ を含む行と列は p 以外すでに穴が開いていることに注意
- 角に置く場合は対角線に乗るので D を変化させる

	×	×	×	
	×		×	
	×	×	×	

計算量

- 状態数が $O(N^2)$ で遷移の仕方は $O(1)$
- 包除原理の分を含めると計算量は $O(2^K N^2)$
- 定数倍が結構大きい
- 最初に行と列を適当に入れ替えてやることで高速化できる
  - 場合分けを減らせる
  - DP の部分が何度も実行され, 同じ状態を何度も取るのでメモ化できる
- 今回は高速化しなくても通る

$B(\emptyset, T)$ を包除原理で計算する

対角線の処理が面倒なのでここも包除原理を使って

$$
\begin{aligned}
B(\emptyset, T) = & \ (2\text{ つの対角線は無視する}) \\
& - (\text{右下がりの対角線でビンゴ}) - (\text{左下がりの対角線でビンゴ}) \\
& + (2\text{ つの対角線でビンゴ})
\end{aligned}
$$

と変形しておく

対角線を無視した場合

- 対角線を無視する場合は $N \times N$ の格子に行と列がかぶらないように N 個 × を置く場合の数と等しい
- すでに T には置かれているので全部で $(N - |T|)!$ 通り

終状態と置換の対応

- 終状態を置換と対応させ, 巡回置換の積として表す
- 図の場合だと (01)(2)(34) となる

	×			
×				
		×		
				×
			×	

右下がりの対角線でビンゴしている場合

- 置換で考えると, 右下がりにビンゴしているとは固定点を持たないことになる
- まず $T = \emptyset$ の場合を考える
- 固定点を最低でも k 個持つ置換の個数は $(N - k)!$ 個
- また包除原理を使って固定点を持たない場合を計算することができる

$$(\text{固定点を持たない置換}) = \sum_{k=0}^{N} {}_N C_k (-1)^k (N - k)!$$

- 左下がりの場合も上下反転するとこの場合になる

$T \neq \emptyset$ 場合

- $T \ni p = (x, y)$ に穴が開いていないというのは, 巡回置換の積で表すと $(\cdots\ x\ y\ \cdots)$ というのを含むことになる
- $x\ y$ を一つの文字として考えてやる
- $x\ y$ は固定点になっても良い
- $T \ni (x, y), (y, z)$ なら $x\ y\ z$ を一文字と考える, など同様にする
- $nonfix[i][j] = (0 \sim i-1$ の置換で $0 \sim j-1$ は固定点にならない$)$ が計算できればいい
- 先ほどと同じように

$$nonfix[i][j] = \sum_{k=0}^{j} {}_jC_k (-1)^k (i-k)!$$

となる

2 つの対角線でビンゴしている場合

- 先ほどと同じように $T \ni p = (x, y)$ なら $x\ y$ を一文字と考える
- 2 つの対角線でビンゴしているとは, 置換で考えると固定点を持たないかつ $x\ N - x - 1$ とならないことになる
- 隣接してはいけないものを場合分けする
  1. x と $N - x - 1$
  2. $N - x - 1$ と $x \cdots y$, $x \cdots y$ と $N - y - 1$
  3. $x \cdots y$ と $N - y - 1 \cdots z$
- 包除原理を使って隣接してはいけないものが隣接している場合を除く

注意

- (1) の場合だけ $N - x - 1$ と x を一文字にまとめても 2 通りまとめ方がある
- $T \ni (x, y), (y, z), (z, x)$ のようなループしている場合だと $(x\ y\ z)$ ができる