

F: Network Reliability

原案: 松本

解答: 北川, 田山

解説: 北川

問題概要

- グラフ $G = (V, E)$ が与えられる
- 各辺は確率 p で壊れる
- 残っているグラフが連結である確率を求めよ

小さいグラフの話に落とす

- 適当な頂点 v_0 をとる
- G の部分グラフ (V, E') は、 v_0 が属する連結成分の頂点集合 $V(v_0)$ で類別できる
- $V = V(v_0)$ のときに (V, E') は連結になるので次のような式が成り立つ

$$(V \text{ が連結になる確率}) = 1 - \sum_{V' \subsetneq V} (V' = V(v_0) \text{ になる確率})$$

$V' = V(v_0)$ になる確率

- $V' = V(v_0)$ になるのは V' が連結でさらに辺 $(u, v) (u \in V', v \in V - V')$ が全て壊れているとき
- よって $n = |\{(u, v) \in E | u \in V', v \in V - V'\}|$ とおくと次の式が成り立つ

$$(V' = V(v_0) \text{ になる確率}) = (V' \text{ が連結になる確率}) p^n$$

- 後は動的計画法で V' が連結になる確率を V' が小さい方から順に計算すればよい
- 計算量は $O(3^{|V|})$ になる