

JAG Summer Contest 2011 Day4

問題 D - ハコの魔女

原案：森

解答例：森、楠本

解説：森

問題

- ▶ 頂点数 n 、変数 e のグラフが与えられる
 - ▶ グラフに辺を1本追加・削除するクエリが q 個来る
 - ▶ 各クエリを処理し終えた後に頂点1と頂点 n の辺連結度はいくらになるか？
-
- ▶ $2 \leq n \leq 500$
 - ▶ $0 \leq e \leq 20000$
 - ▶ $1 \leq q \leq 1000$

解法

- ▶ 辺連結度 = 辺素なパスの数 = maxflow
- ▶ とりあえずDinicは？
 - 1000回Dinicをやるのはちょっと無謀すぎる
 - ついでにやばそうなinputがサンプルに見える
- ▶ クエリの平方根分割は？
 - 間にあうか微妙な所
 - 工夫すれば間にあいそうだが、実装が重い
- ▶ 解法の説明の前に残余グラフ、増大路の概念を知っておきましょう

残余グラフ & 増大路

▶ 残余グラフとは？

- グラフ G にフロー f を流した時にまだ容量が残っている辺と、水が流れている部分の逆辺をエッジとして持つグラフのこと

▶ 増大路とは？

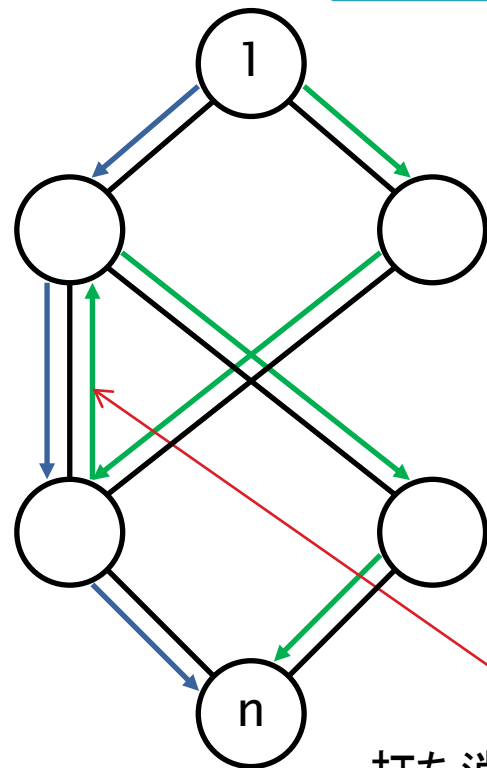
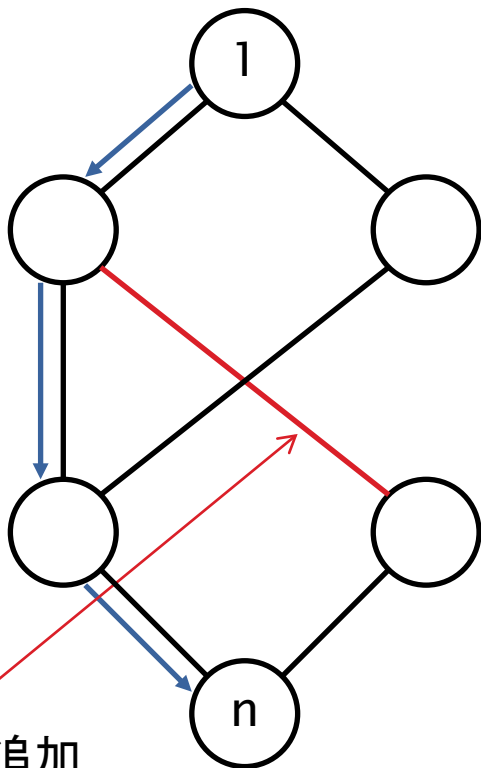
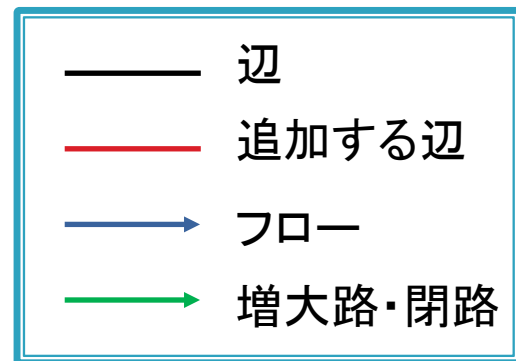
- 残余グラフ上のsource(1 の頂点)からsink(n の頂点)までのパスのこと
- 増大路に 1 水を流すと答えが 1 増加する
- 残余グラフ上に増大路が無い場合に最大流になる

▶ 詳しい説明は書籍などを参考にして下さい

解法 辺が追加される場合

- ▶ クエリに注目してみる
 - 1つのクエリは高々辺を1本操作するだけ
 - 1つ前のグラフと比べて答えは高々1しか変わらない
- ▶ 簡単そうな、辺が追加されるクエリをまず考える
 - 答えが変わらない場合
 - →新しい残余グラフに増大路が無い
 - 答えが1増える場合
 - →新しい残余グラフに増大路がある
- ▶ この判定はdfsで簡単に調べられて、新しい残余グラフも同時に作成可能

答えが1増加する場合



この辺を追加

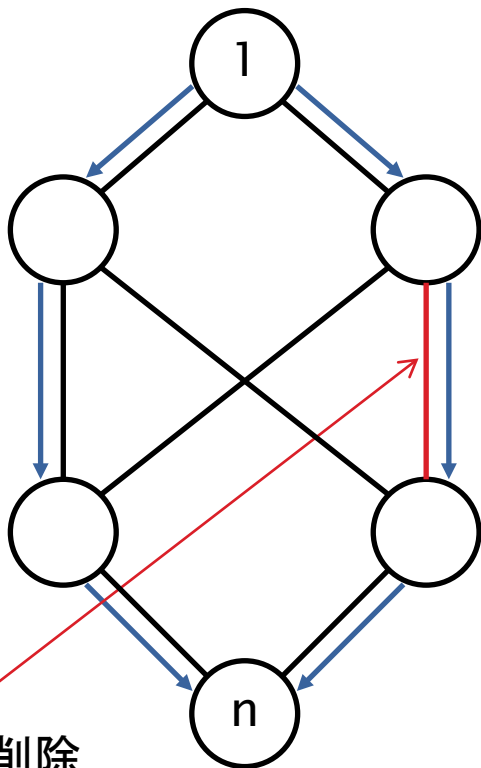
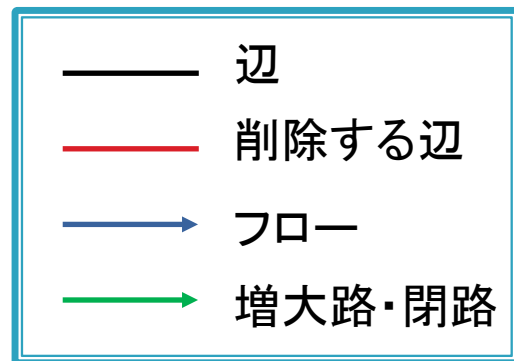
打ち消し合って消える

増大路を見つける

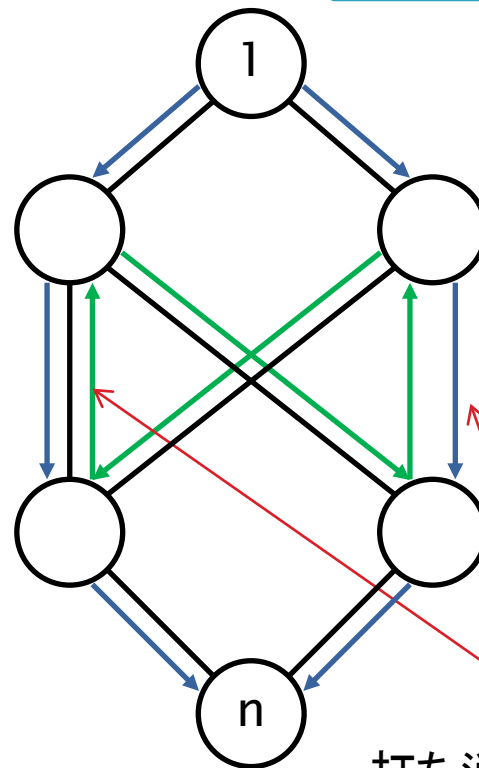
解法 辺が削除される場合

- ▶ その辺がフローに使われてない場合
 - 答えは変わらない。その辺を削除するだけで良い
- ▶ その辺がフローに使われている場合
 - その辺を使わないフローに変更できれば答えは変わらない
 - → 残余グラフ上にその辺(の逆辺)を含む閉路を見つける
 - → その閉路に水を流せば水の流れが変わって、その辺を使わないフローになる

答えが変わらない場合



この辺を削除



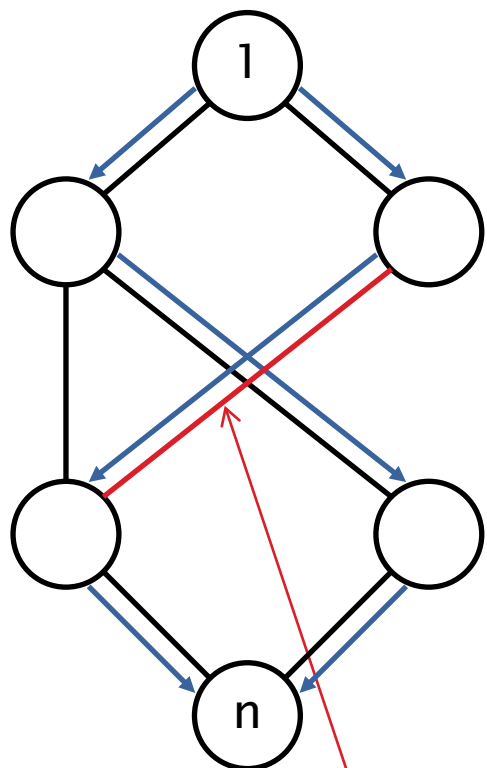
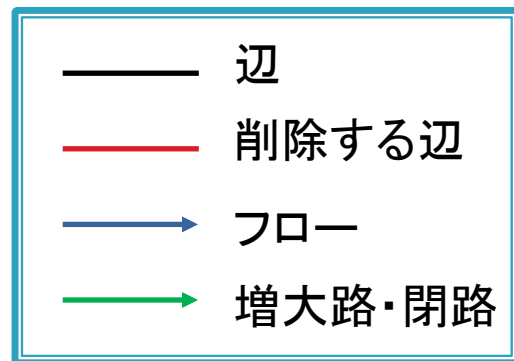
打ち消し合って消える

赤い辺を通る
閉路を見つける

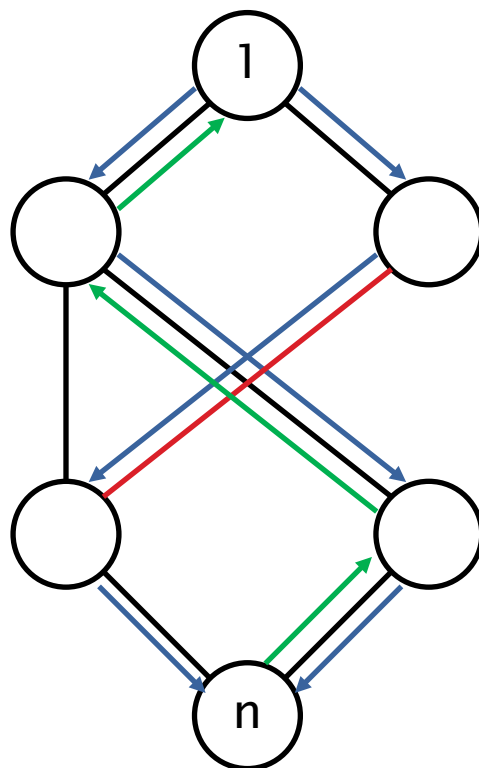
解法 辺が削除される場合

- ▶ 答えが変わる場合(閉路が無かった場合)
 - 答えは1減る
 - 新しい残余グラフを求める必要がある
- ▶ とりあえず、頂点 n から頂点 1 へ水を流すと答えが1減り、辺を削除する前のグラフで有効なフローに成る！
 - このような頂点 n から頂点 1 への増大路は常に存在する
 - 答えが1減ったので前ページの操作をもう一度試せば必ずその辺を使わないフローが作れる

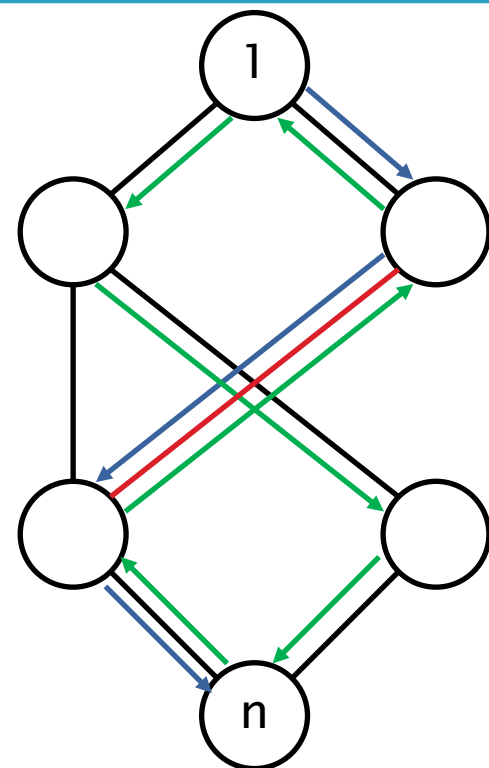
答えが1減る場合



この辺を削除



nから1への
増大路を見つける



赤い辺を通る
閉路を見つける

解法 まとめ

- ▶ 残余グラフ・フローを管理して増大路・閉路を見つける操作を繰り返せば良い
- ▶ 増大路・閉路を見つける操作はdfsで簡単に実装可能
 - 最初のフローを求めるのもdfsでやってしまうとmaxflowの実装がはぶけます
- ▶ 全体で $O(nm + (m+q)q)$ で実行可能
- ▶ 最大流はコピーするだけじゃなくて、理解して使いこなせるようになりましょう

ジャッジ解

- ▶ 森
 - 125行 3200B
- ▶ 楠本
 - 148行 3800B

結果

- ▶ First AC
 - wata (19分, JAG)
 - -Dint=char (53分)
- ▶ AC / Submit
 - 9 / 66 (13%)
- ▶ AC / Trying people
 - 9 / 17 (52%)