

JAG Summer Contest 2011 Day4

問題 F - 影の魔女

原案：森

解答例：森、楠本

解説：森

問題

- ▶ $|s|$ からスタートで n 面ダイスを k 個ふる双六を行う
 - ちょうど0に辿りつくまでのステップ数の期待値は？
 - ちょうど止まれなかった場合は跳ね返って戻る
- ▶ $|s| \leq 10^9$
- ▶ $1 \leq n, k \leq 10$

解法 $|s| \leq nk-1$ 以下の場合

- ▶ n 面ダイスを k 個振った時に x 歩すすめる確率はDPで簡単に計算可能
- ▶ $|s|=x$ の場合の答えを T_x とする
 - 明らかに $T_0 = 0$
 - 他の場合は跳ね返りのせいで計算が厄介
 - DPみたいに考えてとりあえず1ステップ進めた式を考える

解法 $|s| \leq nk-1$ 以下の場合

- ▶ $n=2, k=2$ の場合、期待値は以下のようになる
 - 変数も(独立な)方程式も4つなので連立方程式を解けば答えが求まる
 - 連立方程式を解くにはガウスの消去法を使えばいいです

$$T_3 = \left(\frac{2}{4} T_1 + \frac{2}{4} T_0 \right) + 1$$

$$T_2 = \left(\frac{1}{4} T_2 + \frac{2}{4} T_1 + \frac{1}{4} T_0 \right) + 1$$

$$T_1 = \left(\frac{1}{4} T_3 + \frac{2}{4} T_2 + \frac{1}{4} T_1 \right) + 1$$

$$T_0 = 0$$

解法 $|s| \leq 10^9$ の場合

- ▶ $|s|=10^5$ くらいだったら $O(nk)$ でDPすれば解ける
- ▶ $|s|=10^9$ だったら？
 - とりあえず T_x の更新式を書いてみる($n, k=2$)

$$T_x = \left(\frac{0}{4}T_{x-1} + \frac{1}{4}T_{x-2} + \frac{2}{4}T_{x-3} + \frac{1}{4}T_{x-4} \right) + 1$$

- 最後の1が邪魔だけど、フィボナッチ数の更新式とかに似てる

解法 $|s| \leq 10^9$ の場合

- ▶ フィボナッチ数は行列乗算で高速に計算可能
 - 今回の場合に適応してみると下の行列を $|s|$ 乗すればいい
 - 端の部分 ($x \leq nk$) はガウスの消去法と組み合わせて適切に調整する
 - $O((nk)^3 \log |s|)$ で計算可能

$$\begin{pmatrix} T_{x+1} \\ T_x \\ T_{x-1} \\ T_{x-2} \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_x \\ T_{x-1} \\ T_{x-2} \\ T_{x-3} \\ C \end{pmatrix}$$

別解

- ▶ 小さい部分
 - 収束するまでループを回す
- ▶ でかい部分
 - 出る目の期待値を求めてすっ飛ばす
- ▶ コードも短く、速度も速いです
 - ただしちゃんと適用できる問題か考えてから使いましょう

コーナーケース

- ▶ $n=1$ の場合は連立方程式が解けない
 - 要するに $|s| \% k \neq 0$ の場合に辿りつけない
 - $|s| \% k = 0$ の場合は $|s| / k$ が答え
- ▶ 他の場合には全て辿りつける

ジャッジ解

- ▶ 森
 - 192行 4400B
- ▶ 楠本
 - 158行 3500B

結果

- ▶ First AC
 - icp.cs (52分)
- ▶ AC / Submit
 - 8 / 10 (80%)
- ▶ AC / Trying people
 - 8 / 8 (100%)