D: Digit

原案: 北川
解答: 北川, 水野
解説: 北川

問題概要

- $S(a) := a$ の l 進数で書いたときの桁の和
- $L(a) := S^k(a)$ が l 進数で一桁になる最小の k
- N が与えられたときに $L(a) = N$ となる最小の a を $\bmod m$ で求めよ。

N が小さい場合

- 簡単のため以下の解説では $l = 10$ とする
- $A(N)$ を求める a とする
- $A(0) = 1, A(1) = 10, A(2) = 19$ はすぐわかる
- $S(a) = 19$ となる a の最小値は 199
    - $a < 199$ なら $S(a) < 19$ からわかる
- $S(a) > 19$ なら $a > 199$ となるので $A(3) = 199$ がわかる

$A(N)$ の漸化式

- $A(N+1) = 199\cdots9$ となる
  - 帰納法で $A(N) \equiv 1 \pmod 9$ がわかる
  - 9 を $(A(N)-1)/9$ 個並べ先頭に余りの 1 を置けば $A(N+1)$ になる
  - この作り方で最小の a になるのは $N = 3$ の場合と同様
- $A(N+1)$ の 9 の個数は $(A(N)-1)/9$ 個なので次の漸化式が成り立つ

$$A(0) = 1$$

$$A(1) = 10$$

$$A(N+1) = 2 \cdot 10^{\frac{A(N)-1}{9}} - 1$$

式変形

- $A(N)$ の式のままでは計算しづらい (???) ので、式変形する
  - (以下 TODO)$A(N)$ のままでもできるかも
  - 10^k の $\bmod m$ での周期が効率的に計算できれば可能
  - 毎回 $\varphi(m)$ の計算途中の積を保持しておけば素因数分解が高速にできて多分できる
  - 周期を c とすると、$A(N-1) \mod 9c$ を計算すればいい
  - $9c$ の部分が増大する？(多分しない、c と 9 が互いに素なら $\bmod c$ で十分とか)
- 指数の部分を簡単にするため $B(N) = (A(N) - 1)/9$ とする

$$
\begin{aligned}
B(0) &= 0 \\
B(1) &= 1 \\
B(N+1) &= 2 \cdot \frac{10^{B(N)} - 1}{9}
\end{aligned}
$$

周期を計算する 1

- $B(N+1) \mod m$ を計算するためには $(10^k - 1)/9$ の周期を計算する必要がある
- m が 9 と互いに素の場合
  - 周期は $\varphi(m)$ を割り切るので m よりも減少する
- そうでない場合、例えば $m = 27$ の場合
  - mod $9m$ での周期を計算する必要があるが、荒い評価 $\varphi(9 \cdot 27) = 2 \cdot 81$ だと mod の部分が指数関数的に増大してしまう
  - 実際の周期は 27 で m と等しくなる
  - ちゃんと周期を求めてやる必要がある

周期を計算する 2

- $(10^k - 1)/9$ の mod 3^e での周期を計算する
- exp を利用して求める方法もあるが略
- $10 = 9 + 1$ として二項定理で 10^k を展開してやる

$$\frac{10^k - 1}{9} = \sum_{i=1}^{k} {}_k\mathrm{C}_i 9^{i-1}$$

- i が十分大きいところでは 9^{i-1} は mod 3^e で 0 になる
- i を固定すると ${}_k\mathrm{C}_i 9^{i-1}$ は k に関する多項式なので mod 3^e で周期は 3^e を割り切る
  - ${}_k\mathrm{C}_i 9^{i-1}$ を階乗で展開すると分子に $i!$ が出るが、3 の倍数は 9^{i-1} で打ち消される
- とくに $i = 1$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i 9^{i-1} = k$ なので全体の周期はちょうど 3^e になる

周期を計算する 3

- 一般の m の場合は $m = 3^e q$(q は 3 で割り切れない) と分解すると周期は $3^e \varphi(q)$ を割り切る
  - l が一般の場合は $m = pq$(p は $l-1$ と共通因子を持つ部分 q は $l-1$ と互いに素) として同じ
- 毎回 φ を計算すると遅いように感じるが、φ の中身は指数関数的に減少するので問題ない
- 普通にもっと簡単にできるような気がする…