最短ルート

原案: 野田
解答: 北川, 林崎
解説: 北川

問題概要

- ステージ制のアクションゲームをクリアしたい
- 各ステージをクリアするごとに装備が増えていき、他のステージの攻略時間を減らせる
- ステージを攻略する順番を適切に選んで、全てのステージをクリアするのにかかる時間を最小にしたい

解法 (DP)

- 攻略したステージの集合を決めると、持っている装備は同じなので次のステージの攻略時間は同じ
- ステージ全体の集合を S とする
- ステージの部分集合 $T \subset S$ に対して、$dp[T] :=$ (T を攻略するのにかかる最小時間) を T が小さい順に計算していけばよい

解法 (漸化式)

- $dp[T]$ の間には漸化式が立てられる
- $T \subset S$ に対して $dp[T]$ を計算する
- T の内最後に攻略したステージを $t \in T$ とすると $dp[T]$ は t を動かしたときの $dp[T \backslash \{t\}] + (T \backslash \{t\}$ を攻略した後 t を攻略する時間) の最小値になる
- よって、$dp[T] = \min_{t \in T}\{dp[T \backslash t] + (T \backslash \{t\}$ を攻略した後 t を攻略する時間 $)\}$ となる

計算量

- ステージの個数は N 個なので、その部分集合は 2^N 個
- $dp[T]$ の更新の計算量は $|T| \leq N$ なので $O(N)$
- または、手を抜いて $(T \backslash t$ を攻略した後 t を攻略する時間) の部分に $O(N)$ かけて $O(N^2)$
- よって、全体で $O(2^N N)$ で計算できる

別解

- もっと高速な別解がある
- $0 \sim N$ までの頂点を用意する
- 装備 i でステージ j をクリアする時に頂点 i から頂点 j に重み t_{ij} の辺を張る
- そうすると、同じ頂点に入ってくる辺はちょうど一つなので有向木になる
- 戻っていくとどこかで装備 0(装備を使わない) でクリアするステージに行くので、木の根は頂点 0 になっている
- つまり i から j に重み t_{ij} の辺を張ったグラフの、0 を根とする最小全域有向木を求める問題になった
- これは $O(N^3)$ で求まる

結果

- First accepted: **17**min (STAFF)
- Number of accepted: **41**