

# ケ一キ分割問題

原案: 岩田

解答作成: 北川・岩田

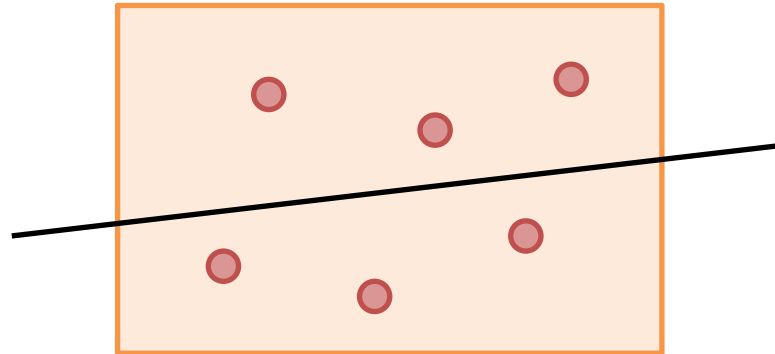
解説: 岩田

# 問題内容

$W \times H$ の長方形のケーキ上に $2N$ 個のイチゴが載っている。

$y_1, y_2$ を $[0, H]$ から等確率で選び,  $(0, y_1)$ と $(W, y_2)$ を結ぶ直線で二分割する。

イチゴが $N$ 個ずつに分割される確率を求めよ。



# 積分

確率は積分すれば求まる

$$\text{答え} = \frac{\int_0^H \int_0^H f(y_1, y_2) dy_1 dy_2}{H^2}$$

$$f(y_1, y_2)$$

$$= \begin{cases} 1 & (\text{直線}(0, y_1)(W, y_2)\text{がイチゴを二等分する}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ただし、数値積分では精度が足りない

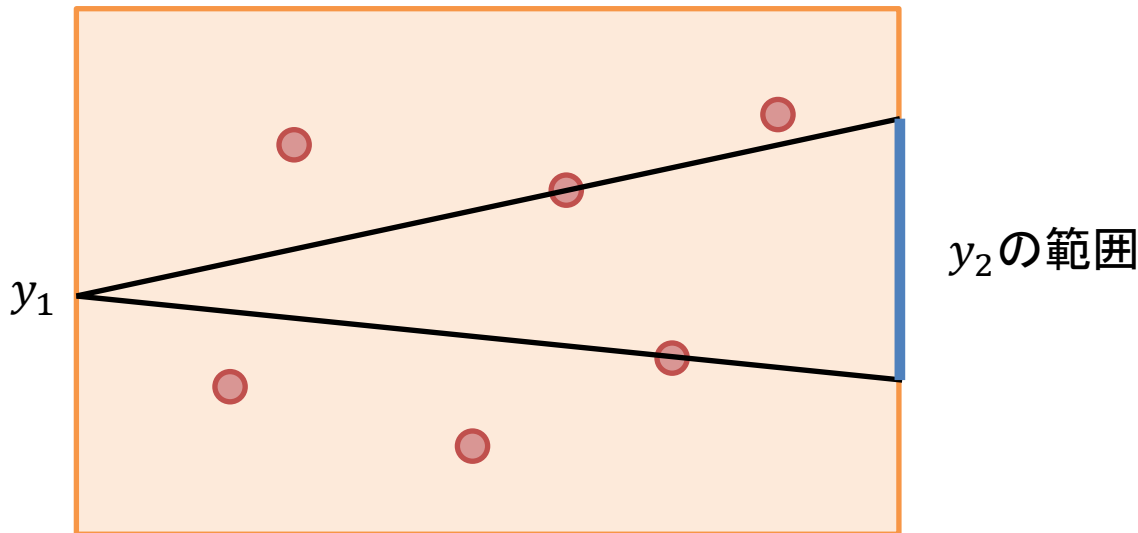
# 片方固定

とりあえず  $y_1$  を固定してみる

→ 二等分できる  $y_2$  は連続した区間になる

境界はイチゴと結んだ直線との交点

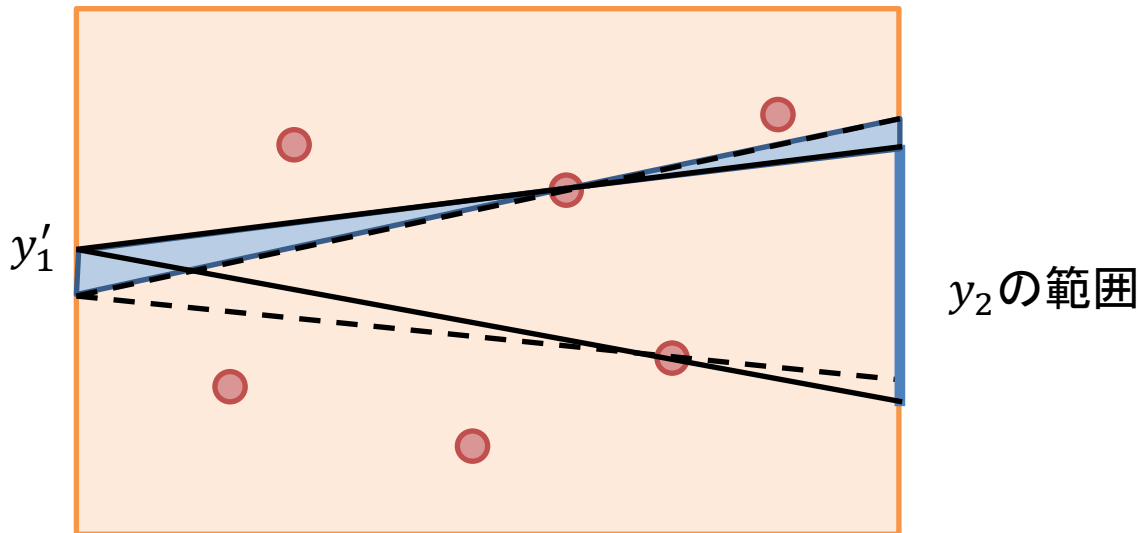
(境界上のイチゴは  $y_1$  とイチゴを結んだ直線の傾きをソートするなどすれば求まる)



# すこしずつらすと

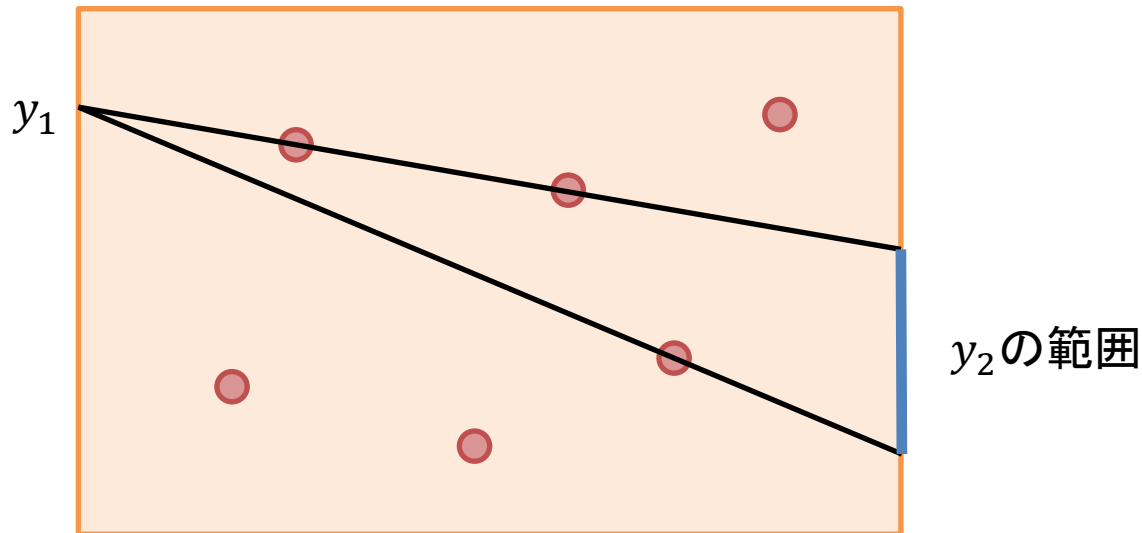
$y_1$  に対して区間の長さは線形に変化

相似な三角形二つに着目すれば分かりやすい



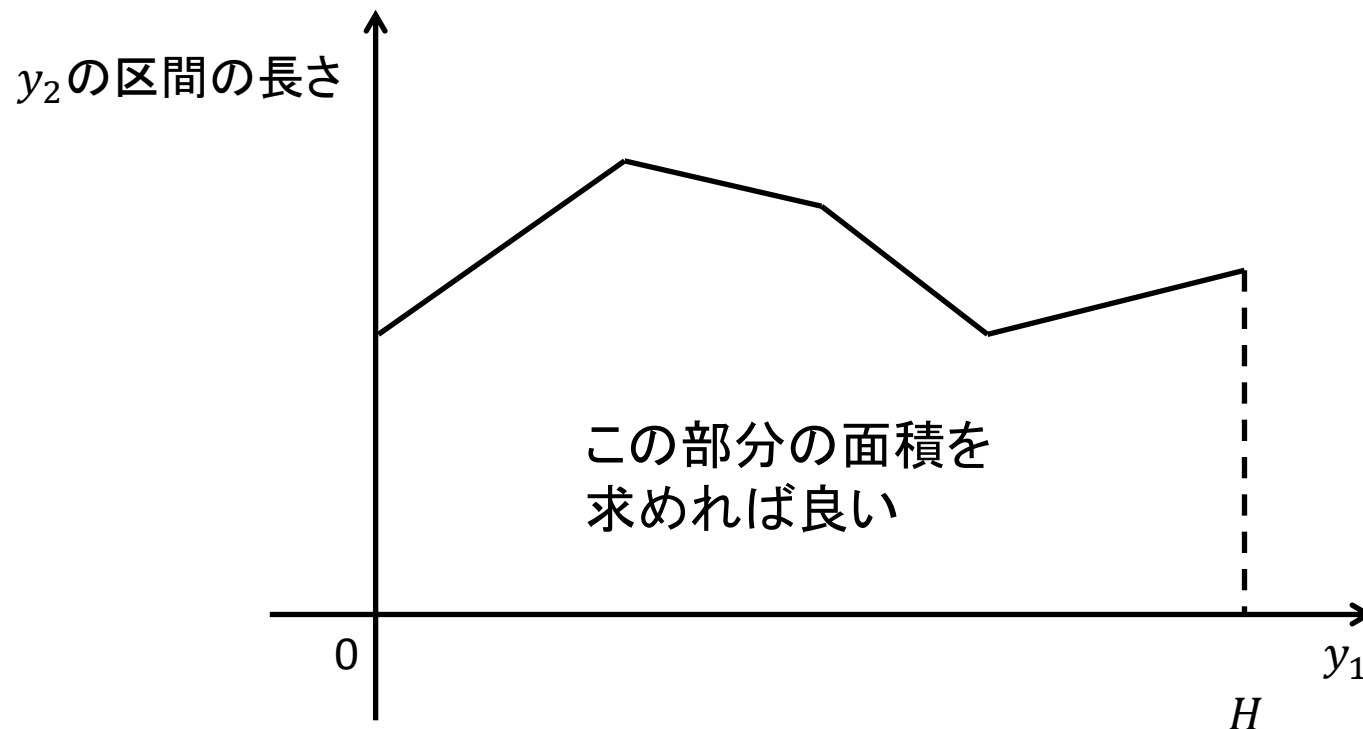
# もつとずらすと

境界上にイチゴが二つ載り、それ以上ずらすと入れ替わる



# グラフにしてみる

折れ線になり，折れ曲がる点では二つのイチゴ，  
もしくは一つのイチゴとケーキの角が同時に境  
界上に載る



# 区間を分割

二つのイチゴ, もしくはイチゴとケーキの角を結ぶ直線と,  $y$ 軸との交点を列挙し,  $[0, H]$ を分割すると, 一つの区間の中ではグラフは折れ曲がらない

→台形の面積を求めるだけ!

→区間の midpoint での  $y_2$  の長さを求め, 区間の幅をかければよい

50行くらい書くだけで解けます



# 結果

- AC: 2チーム
- FirstAC: STAFF (1時間13分)