

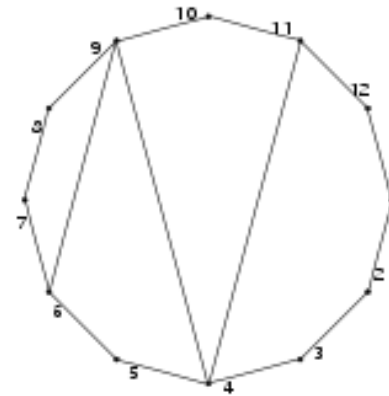
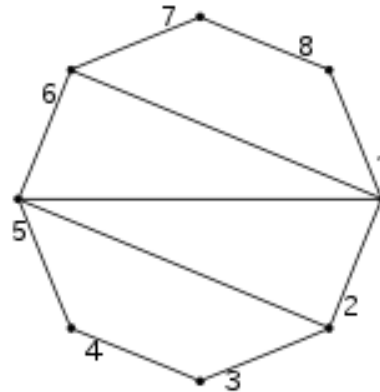
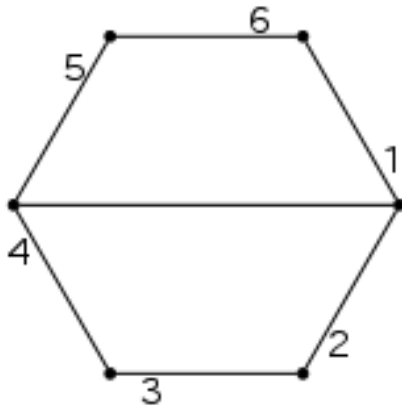
ACM-ICPC OB/OG の会
2012 年模擬国内予選 問題 G
姉妹港 (Sister Ports)

原案：秋葉，岩田

解答：秋葉，岩田

解説：秋葉

問題概要



上図みたいなグラフの完全マッチングを数えよ

グラフの条件

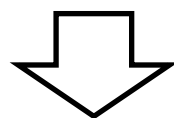
- 外側に N 角形があって、
- 内側に M 本辺があって
- 辺は交差しない

- このグラフは、**平面グラフ**
 - 辺が交わらないように平面に描ける
- それだけでなく、**外平面グラフ**
 - ある 1 つの面に全ての頂点が属す
- さらに、外平面グラフの**特別な場合**
 - 多角形 1 つで全体が描ける

ただし、これらの知識は想定解法では不要

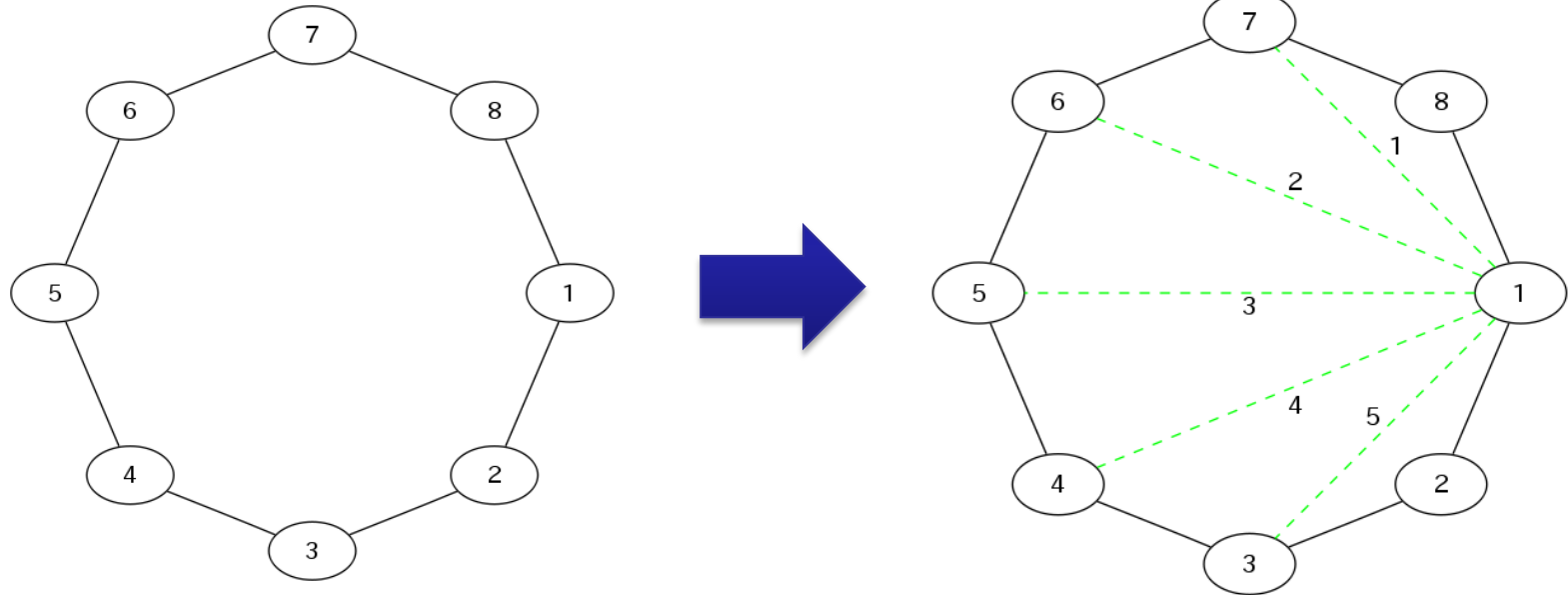
想定解法：基本アイディア

- ビット DP みたいなことをしたい
- 覚えておく頂点数を小さくしたい
- そのために順番を工夫したい



うまくやると，覚えておく頂点数は
常に 2 個にできる

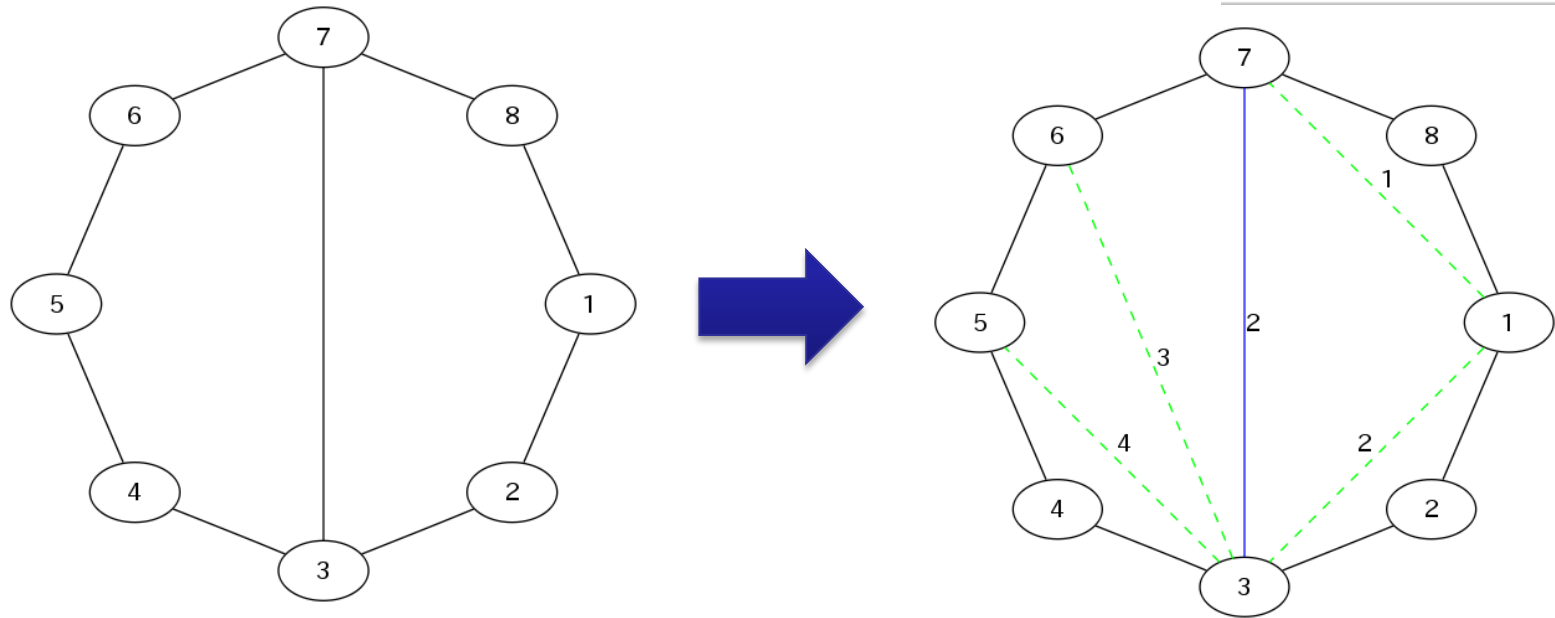
想定解法：内部に辺がない場合の例



メモ再帰で考える

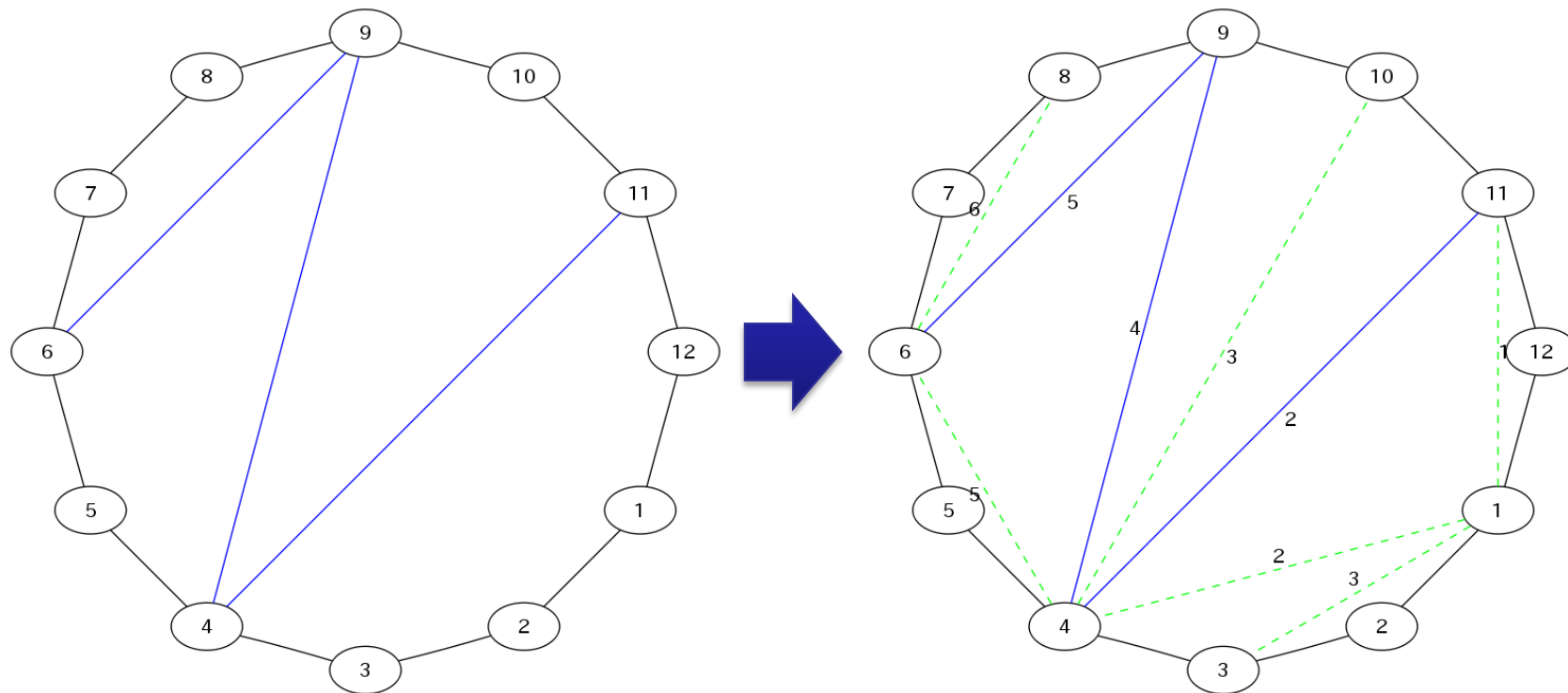
- 最初に $\{1, 8\}$ をどうするか決める
- $\{1, 8\}$ の使用状況に基づき, 7 をどうするか決めて再帰
- $\{1, 7\}$ の使用状況に基づき, 6 をどうするか決めて再帰
(ここで, もう 8 については忘れてよい)
- ...

想定解法：内部の辺がある場合の例



- $\{1, 7\}$ の使用状況に基づいて, 3 をどうするか決めたら,
 - $\{1, 3\}$ の状況を覚えて, $\{1, 2, 3\}$ について再帰
 - $\{3, 7\}$ の状況を覚えて, $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ について再帰というように分岐して再帰

想定解法：もっと複雑な場合の例



やっぱりできる

想定解法：つまり？

- 面に辺を足して，全て三角形にして
- 隣接する三角形について潜っていく
というようなことをやれば良い

三角形への分割はどんな物でも良い

(なので，処理が楽になるような方法を選ぶと良い)

想定解法：実装法

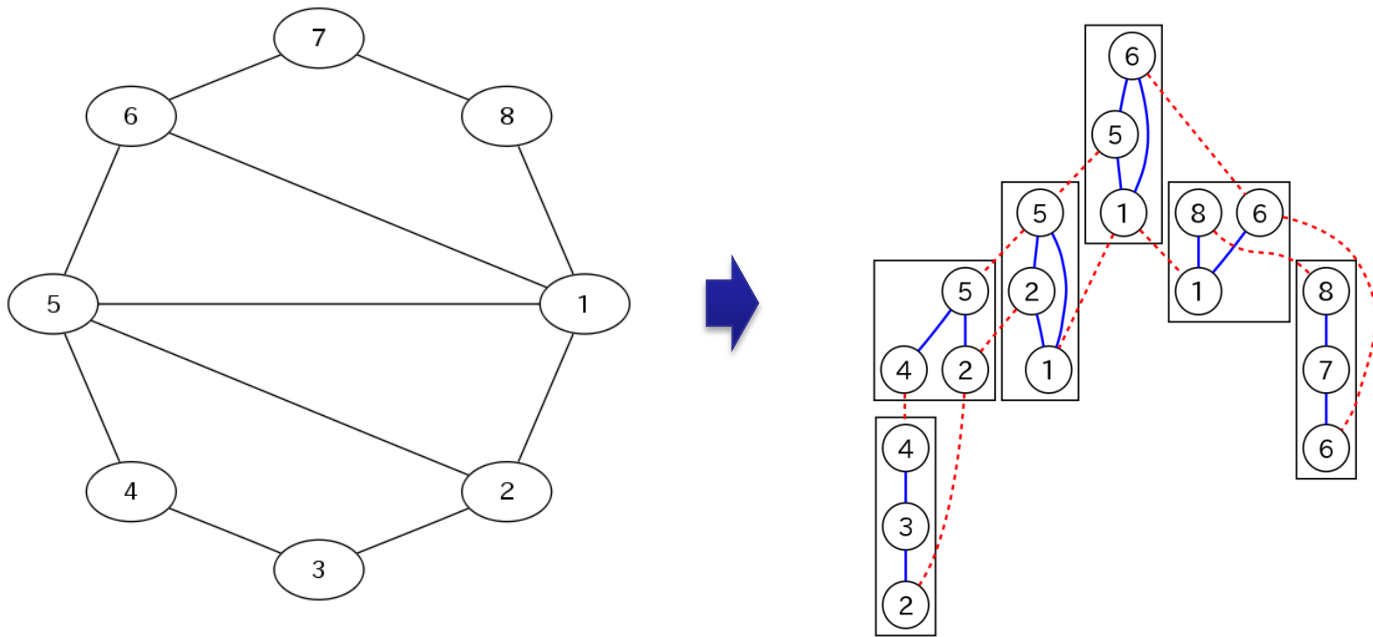
- 実際には，分割を求める必要はない
 - 次に決める頂点を選ぶだけでよい
 - メモ再帰しながら簡単にできる
- 処理する部分を区間として扱うと楽
 - $1, 2, \dots, N$ と頂点を直線上に並べたと考える
 - 処理中の部分がその区間になるようにできる

計算量は $O(N)$ とか $O(N \log N)$ とか

別解 1 : Tree Decomposition

外平面グラフは高々 2 の木幅を持つ

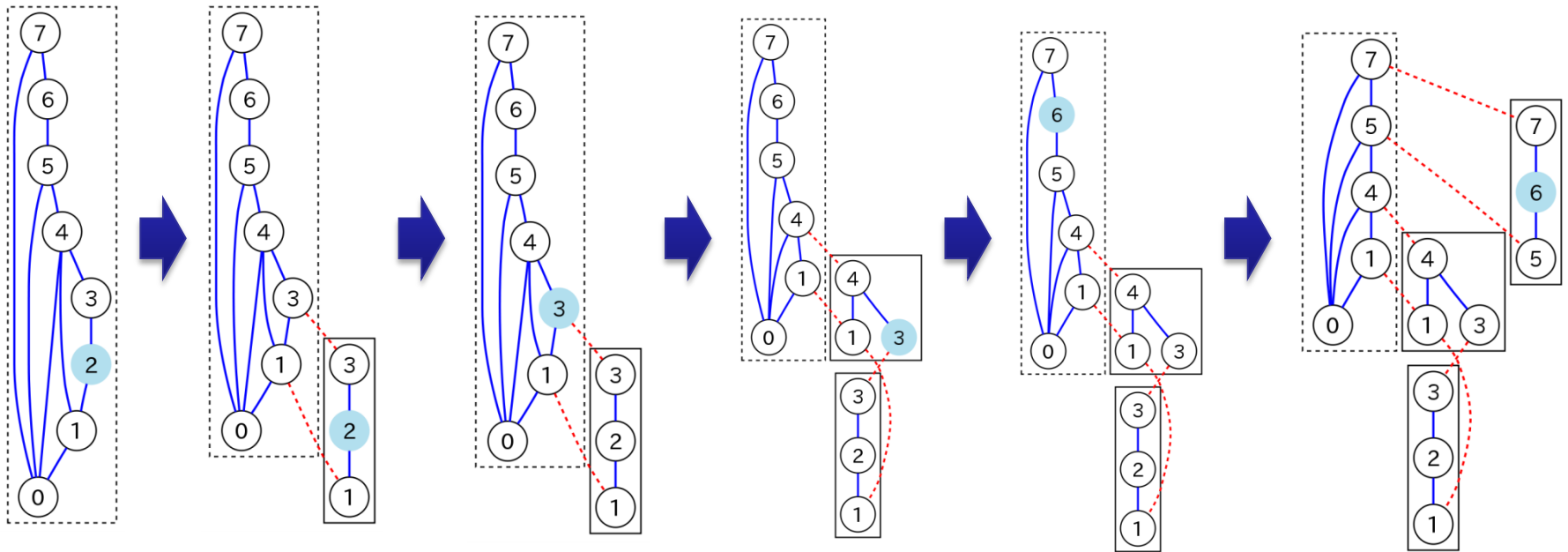
(木幅, 木分解 : http://en.wikipedia.org/wiki/Tree_decomposition)



木分解を陽に求め, その上で DP してもよい
(本質的には想定解法と同一)

別解 1 : Tree Decomposition

木分解 : 次数 2 の頂点を縮約していけば良い



別解 2 (?) : FKT Algorithm

より一般に，平面グラフの完全マッチングは
多項式時間で数え上げられる

1. 辺に向きをつける

- 全ての面について，時計回りに一周すると逆向きの辺の個数が奇数になるようにする
- 向き付けの順番を工夫すれば必ずできる

2. 隣接行列の Pfaffian (= 行列式の平方根) を求める

- mod での平方根...? 多倍長整数...?

詳しくは

- http://en.wikipedia.org/wiki/FKT_algorithm
- <http://mono.kmc.gr.jp/~oxy/d/?date=20100827#p01>
- <http://www.cs.bris.ac.uk/~montanar/presentations/matchings.pdf>

コメント

- 解法は比較的思いつきやすいが、どのように実装すればよいか悩む問題
- うまく整理できれば、コードはシンプル
- 他の問題がコーディングされている間にこのような整理を終え、実装の時間をしっかり減らせるかが重要
(この問題に限った話ではないが)

解答状況

- 最初の提出 : 2:11:53 (_____)
- 最初の正解 : 2:19:22 (_____)
- 提出チーム数 : 7 チーム
- 正解チーム数 : 3 チーム
 1. _____
 2. usagi
 3. teishinchou