

# E: 順位付け

原案: 林

解答: 秋葉 大橋 林

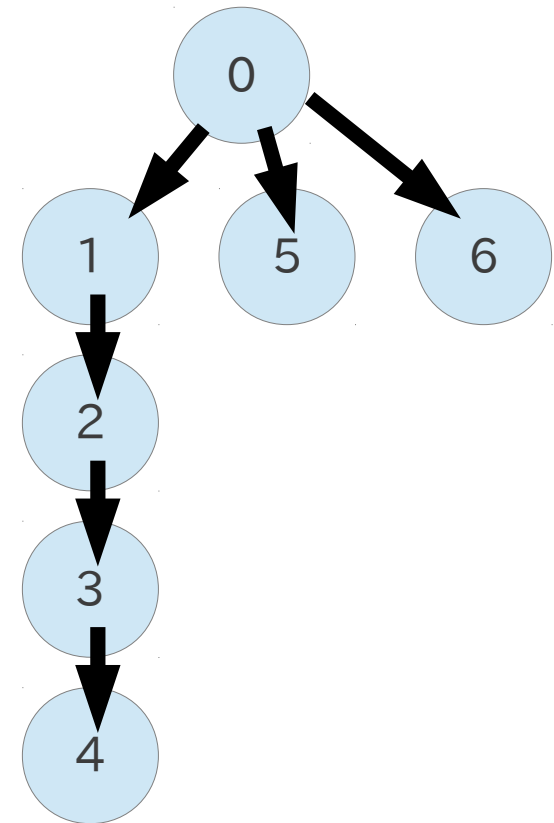
解説: 林

# 概要

- N本の塔がある。
- 塔の大小関係を表す表Tを作成したい。
- イクタ君の調査よりN-1個の情報が与えられる。
  - $T[a_i][b_i] = 1$
  - $T[b_i][a_i] = -1$
- イクタ君の調査と矛盾しないTは何通りか？

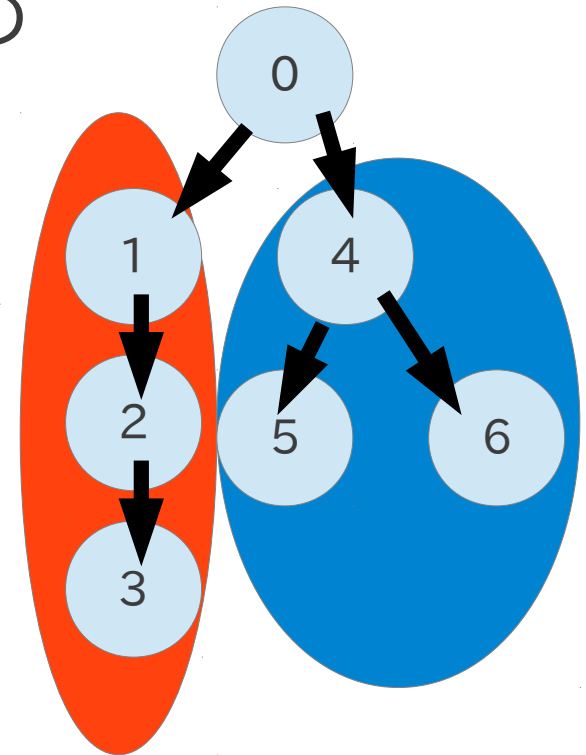
# 解法

- 表 = 塔の大小関係
  - (塔0)<(塔1)<(塔2)に対応する表は1通り。
  - 塔の大小関係が何通りか求める。
- イクタ君の調査からわかる塔の大小関係は木になる。
  - $a_i$ から $b_i$ に辺をはる。
  - サンプル4は右図のようになる。
  - 塔0が塔4より大きいのはわかる。塔5が塔4より大きいかは不明。



# 解法

- 兄弟ノードを頂点とする部分木の大小関係は独立に決めることができる。
  - 左図の赤い部分の木と青い部分の木の大小関係は互いに独立
- 木全体の大小関係を計算するには子を頂点とする部分木の大小関係をそれぞれ計算して親がマージする感じでやればよい。



# 解法

- 木DPで計算する。
- 高さが等しい塔が存在するので塔の高さが何種類あるかもパラメタにする必要がある。
  - $dp1[(\text{部分木の頂点})][(\text{高さの種類})] = (\text{大小関係の数})$
- 計算を補助するためa種類の要素を持つ列とb種類の要素を持つ列をマージするときのテーブルを作る
  - $dp2[a][b][c] := (\text{マージ後、要素数がc種類になる場合の数})$

# 解法

- 高さが  $a, b$  種類の列をマージして  $c$  種類の高さの列を作るとき、 $a, b$  の最大値の大小について3通りの場合が考えられる。
  - $a, b$  の最大値が等しい
  - $a$  の最大値のほうが大きい
  - $b$  の最大値のほうが大きい
- $$\text{dp2}[a][b][c] = \text{dp2}[a-1][b-1][c-1] + \text{dp2}[a-1][b][c-1] + \text{dp2}[a][b-1][c-1]$$

# 解法

- 簡単のため木が二分木になっているとする。
- $v$ の子 $l, r$ を根とする部分木の高さの種類を $a, b$ とするとき、 $v$ を根とする部分木で $c$ 種類の高さを持つものは
  - $dp1[l][a] * dp1[r][b] * dp2[a][b][c - 1]$ 通り
- $l, r$ を根とする部分木の高さの種類 $i, j$ に関して2重ループ
  - $dp1[v][c] = \sum \sum dp1[l][a] * dp1[r][b] * dp2[i][j][c-1]$

# 計算量

- dp2の計算は3重ループなので $O(N^3)$
- dp1で部分木の大きさが $v$ のときに計算量を $T(v)$ とする。左右の部分木のサイズを $l, r$ とすると計算量の漸化式は
  - $T(l + r + 1) = T(l) + T(r) + l^2 * r$のようになる。
  - $(l + r + 1)^3 \geq l^3 + r^3 + l^2 * r$より $T(N) = O(N^3)$ 。
  - 参考 <http://topcoder.g.hatena.ne.jp/iwiwi/20120428>



# 結果

- Accept数: 7
- 提出数 : 10
  
- First Accept(全体) : tomerun (55:09)
- First Accept(Onsite): Operasan(109:40)