



# Problem D

# Time Table

問題: The hik Revolutions

解説: 田村(sune2)

# 問題

- $S$ 個のバス停がある区間を $M$ 本のバスが通る
- バス停の位置と $N$ 人の利用者がどのバス停にいつ来るかの情報が与えられる
- $M$ 本のバスが出発する時間を自由に決めるとき、利用者の待ち時間の和の最小を求めよ
  
- $1 \leq S, N, M \leq 2000$



## 考察

- $i$ 番目の利用者を待ち時間0で拾うために営業所を出なければならない時間はすぐに計算できる
- この時間を $T_i$ とする
- $i$ 番目の利用者を時刻 $T$ に出発したバスで拾うとき, この利用者の待ち時間は $T - T_i$ となる



# DP

- 利用者を $T_i$ でソートする
- $dp[i][d]$  =  $i$ 番目までの利用者までを $d$ 番目のバスまでを使って回収した時の, 待ち時間の和の最小
- $dp[i][d] = \min_{\{0 \leq j \leq i\}} \{dp[j][d-1] + \text{sum}(i,j)\}$
- ここで
  - $\text{sum}(i,j) = \sum_{\{j+1 \leq k \leq i\}} \text{len}(k,i)$
  - $\text{len}(k,i) = T_i - T_k$
- 答えは $dp[N][M]$



# DP

- $O(N^2 M)$ で遅い
- 高速化
- 一般に $X(i,d) = \min_{j < i} \{ X(j,d-1) + w(i,j) \}$ 型のDPは,  $w$ がMongeなら  $O(NM)$  で計算可能
  - [http://topcoder.g.hatena.ne.jp/spaghetti\\_source/20120915/1347668163](http://topcoder.g.hatena.ne.jp/spaghetti_source/20120915/1347668163)
  - SWARK algorithmを用いる
  - この問題では, monotone minimaを用いた $O(NM \log N)$ の解法でも通る



## monotone minima

- $dp[i][d] = \min_{\{0 \leq j \leq i\}} \{dp[j][d-1] + \text{sum}(i,j)\}$
- $d$ を固定して考える
- $dp_d[i] = \min_{\{0 \leq j \leq i\}} A_{d-1}[i][j]$
- 行列 $A_{d-1}$ の各行において,  $\min$ を高速に求めたい
- $\text{sum}$ がMongeであることから,  $A_{d-1}$ もMongeとなり,  $\text{argmin } A_{d-1}[i][j]$ は $i$ に対して単調増加することが知られている

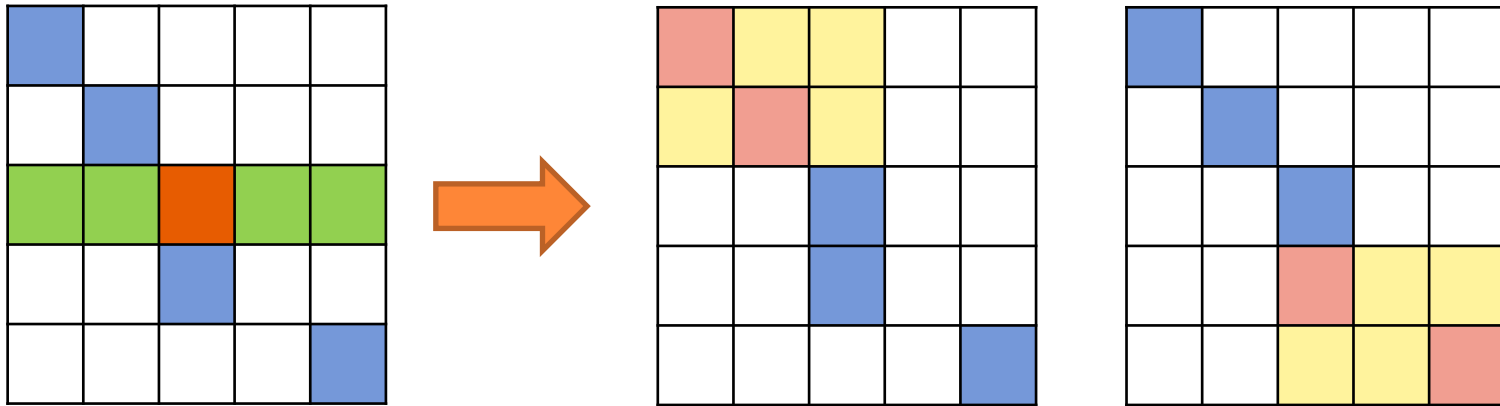
$A_{d-1}$

■				
	■			
		■		
		■		
				■



# monotone minima

- 分割統治により再帰的に各行のminを求める
  - 真ん中の行を走査してminを見つける
  - minの右上と左下にはminは無いので、左上と右下のみ再帰的に調べる
  - 調べる領域は必ず半分程度になる



# monotone minima

- このようにしてminを求める処理を各dに対して順に行う
- $O(NM \log N)$
- 参考
  - [http://topcoder.g.hatena.ne.jp/spaghetti\\_source/20120923/1348327542](http://topcoder.g.hatena.ne.jp/spaghetti_source/20120923/1348327542)
  - [http://www.itcsc.cuhk.edu.hk/Winter\\_School/Winter\\_School\\_2010/Title\\_Abstract/PPT\\_Mordecai.pdf](http://www.itcsc.cuhk.edu.hk/Winter_School/Winter_School_2010/Title_Abstract/PPT_Mordecai.pdf)
- 後で同じような問題が既出だったことを知りました
  - <http://codeforces.com/contest/311/problem/B>

