



模擬国内予選2013 Problem F テトラ姫のパズル

原案：須藤

解答：大友、須藤

解説：須藤





問題概要

- 三角グリッド上に n 個の正四面体の展開図を配置する
 - 正四面体ごとに覆わないといけないマスが3箇所指定されている
 - 各マスは2つ以上の面で覆ってはいけない
- 与えられたパズルが以下のどれかを調べる問題
 - パズルに解が存在(n 個の展開図を配置できる)
→ Valid を出力
 - どれか1個を除けばパズルが解けるようになる
→ Remove を出力
除けばパズルが解けるようになる正四面体の番号も出力
 - 1個除いただけではパズルが解けるものにならない
→ Invalid を出力





解法概要

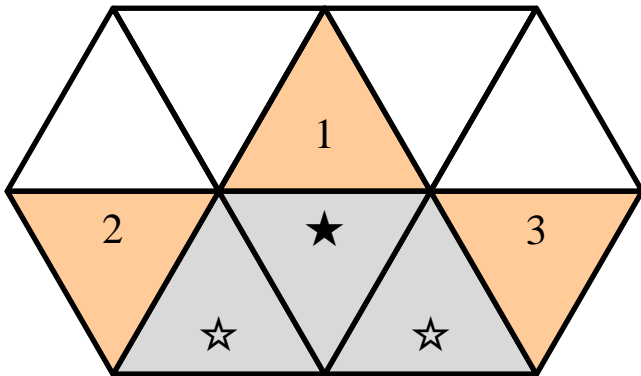
- 与えられたパズルが解けるか判定する問題を考える
 - 以下の $n+1$ 個の場合について判定すればよい
 - n 個の正四面体すべてを使う場合
 - 1番目の正四面体を除く $n-1$ 個の正四面体を使う場合
 - ...
 - n 番目の正四面体を除く $n-1$ 個の正四面体を使う場合
- 解けるかの判定は2部グラフのマッチングで可能
 - n が大きい($n \leq 5000$)ので, 1個を除く場合の判定について効率よく計算するための工夫が必要



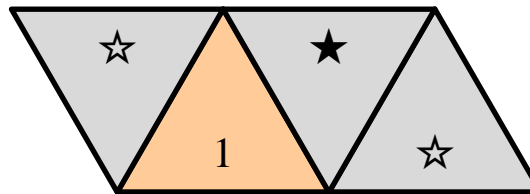


パズルが解けるかの判定(1/2)

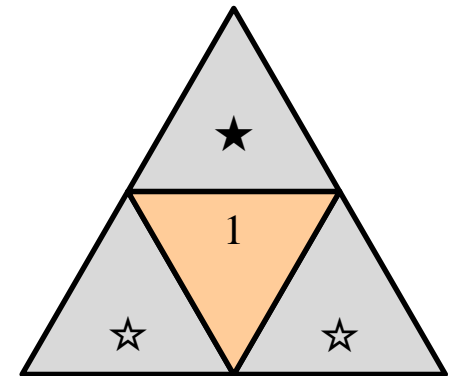
- 展開図のうち3面は置き場所が指定されているので、1面だけが置き方に自由度がある。
- 置き方は(回転を無視すれば)以下のパターンだけ
 - 以下のパターン以外では指定された3面は覆えない



置き方3通り



置き方1通り



置き方1通り





パズルが解けるかの判定(2/2)

- テトラブロックを表す頂点と、マスを表す頂点を用意し、各テトラブロックから最後の1面を置けるマスに枝を張る
 - 他のテトラブロックで既に使っているマスを使わないように注意
- この2部グラフ上での最大マッチングを求め、サイズがテトラブロックの個数なら解が存在
 - 全てのテトラブロックに展開先のマスを割り当てられる
- 枝数がテトラブロックの個数 n に対し高々 $3n$ なので、最大マッチングはFord-Furkersonで $O(n^2)$ で求められる
 - 1個除いた場合についても素直に計算すると全体で $O(n^3)$
 - 各inputで20分くらい粘れば計算が終わる
 - (参考までに)dinicで最大マッチングを求めると3分くらい





高速化(1/2)

- 特定のテトラブロックを1個除いた場合にパズルが解けるかは、全てのテトラブロックを使う場合のマッチングの結果を用いれば $O(n)$ で判定できる
- 1個のテトラブロックを除いてパズルが解けるようになるとき、全ブロックを使ったときのグラフにサイズ $n-4$ 以上のマッチングが存在する
 - あるテトラブロックを除いて作ったグラフで、サイズ $n-1$ のマッチングが存在したとする。除いたブロックを戻すと使えないマスが3つ増えるため、最大で3つの組が解消される。このサイズ $n-4$ の割り当ては、全てのテトラブロックを使った場合のグラフ上でも有効。
 - 全ブロック使用時に展開できないテトラブロックが5個以上あったら Invalid と判定してしまっても良い





高速化(2/2)

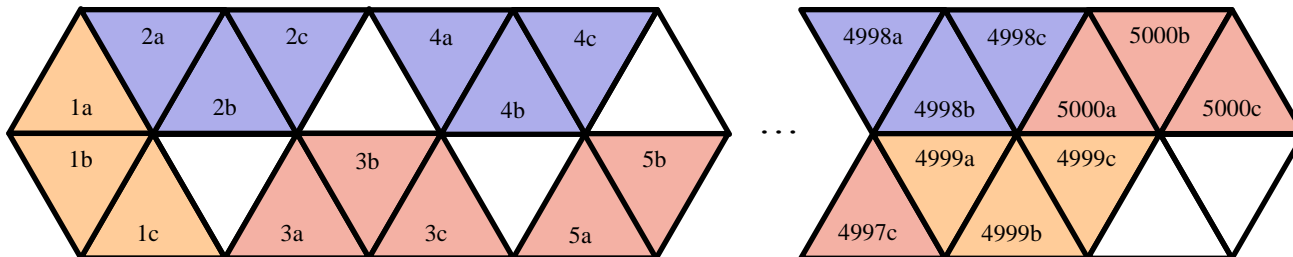
- 1個のテトラブロックを除いたとき，マス割り当てられなかった(最大4個の)ブロックについてだけ，割り当てができるかチェックすれば良い
 - グラフを更新する(使えないマスの情報を更新)
 - 各頂点に使用不可フラグを持たせておくとう更新の実装が楽
 - 割り当てできなかったブロックについて割り当てがあるか調べる(Ford-Fulkersonで1個あたり $O(n)$)
 - 調べるブロックが定数個なので， $O(n)$ で判定可能
- 結果の使い回しにより，1個のブロックを除いた場合を全て調べても全体で $O(n^2)$
 - 各inputで数秒待てば実行が終わる





補足

- 2部グラフの構築が面倒なので、手の空いている人が実装を詰めて置かないと辛いです
 - 展開図のパターンを列挙しておくなど
- ローカル実行なので、 $O(n^3)$ でのんびり待つ戦略もあり
 - ただし残り時間に余裕がある場合に限る
 - 待ち時間に高速化→2つ目のinputに別プログラム提出などとすると答えが合っても不正解になるので注意
- どの1個を除いても解けるようになるケースが存在します
 - 下図のパターン(inputにはシャッフル&回転して入っています)





ジャツジ解

- 大友
 - 194行(4851B), C++
 - 215行(5459B), C++ (dinic版)
- 須藤
 - 166行(4256B), C++
 - 158行(3537B), C++ ($O(n^3)$ 版)





結果

- Submitチーム数 : 1
- Acceptチーム数 : 1
- 総Submit : 1

- First Accept : MadokaMAgica (2h46m)





Last dataset

