I問題: Overwriting Game

原案: 楠本

問題文: 八森（英文校正: 花月, 保坂, 楠本）

解答: 楠本, 保坂, 八森

解説: 八森

問題概要

- H行W列のボードが与えられる(1≦H,W≦5)
- 各セルは黒か白のどちらかで塗られる
- 初期状態とゴールの状態が与えられる

- 初期状態がゴールの状態になるまで下記プロセスを繰り返すとする
  - セル(i, j)（1≦i≦H, 1≦j≦W), 色C（C∈{黒, 白}) をランダムに選ぶ
  - セル(i’, j’) (1≦i’≦i, 1≦j’≦j) を, 色Cに塗り替える

- プロセスが終了するまでに塗り替えられるセルの数の期待値を求めよ

解法

- ボードの色の塗られ方を一つの状態と考える
- 各状態について、その状態から任意の(i, j)・色Cを選んだ時、どのような確率で別の状態に遷移するかという形で立式可能

→ 各状態から別の状態に遷移するまでに塗り替えるセルの個数の期待値について、連立方程式を立ててガウスの消去法で解く

解法(どんな連立方程式を立てるか)

- **起こり得る状態** B_i **について、以下のような式を立てる**
  - $E(B_i) = \Sigma$ { $P(B_i,B_j)*(E(B_j)$ + **状態**B_i**から状態**B_j**に遷移した時の塗り替え個数**) }

※B_j **は、状態** B_i **に対して任意のセル・任意の色を選んだ時に遷移しうる状態**
※$E(B_i)$, $E(B_j)$**が連立方程式の変数となる**

- **ここで、**
  - $E(B)$: **状態Bの時に、ゴールの状態に変わるまでに塗り替えられるセルの個数の期待値**
  - $P(B_i,B_j)$: **状態**B_i**から状態**B_j**に遷移する確率**

  - B_{init}: **初期状態**
  - B_{goal}: **ゴールの状態**

  - $E(B_{init})$**が求める答え**
  - $E(B_{goal})$ **については、** $E(B_{goal}) = 0$ **の式を立てる**

考慮すべき状態(1/3)

- **普通に考えたら、各セルの状態が黒か白なので、状態数は** 2^(H*W)

  ⇒ H, W **は最大で**5**なので状態数は最大で**1000**万超**

  ⇒ **ガウスの消去法のオーダは** O(n^3) **のため、**
  変数が多すぎてTLE

考慮すべき状態(2/3)

- **いくつかの状態は同じと考えることができる**
  - **例: 一番右下のセルのみがゴールと異なる状態と、
    一番右下のセル含めていくつかのセルがゴールと異なる状態**

			誤

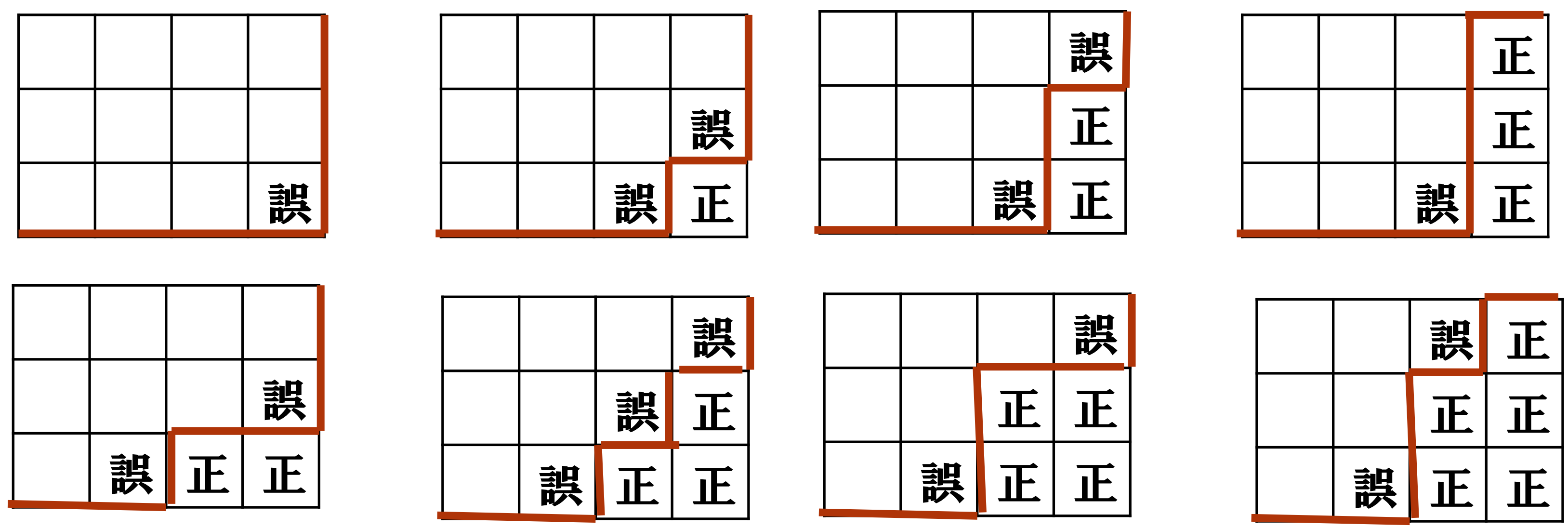
≡

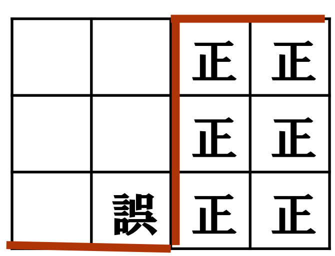
		誤	誤
誤			
			誤

  - **理由: どちらの状態についても、ゴールの状態になるためには
    一番右下のセルを正しい色で塗る必要があり、そのときに
    それ以外のセルが全て塗り替えられて同じ状態となるため**

考慮すべき状態 (3/3)

- **考慮すべき状態** (3×4**の盤面での例**)





など….

- **考慮すべき状態数は左下から右上まで最短で行くルート**(**赤線で強調**)**の個数と同じ**
  →状態数は ${}_{H+W}C_{W}$ **まで減らせる**

結果

- Submit数: 5
- Accept数: 3
- First Accept: TwT514 (246分)