



J: Magical Switches

JAG 模擬地区予選 2013

原案：保坂

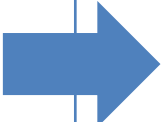
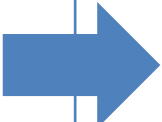
解答：保坂・楠本

解説：保坂



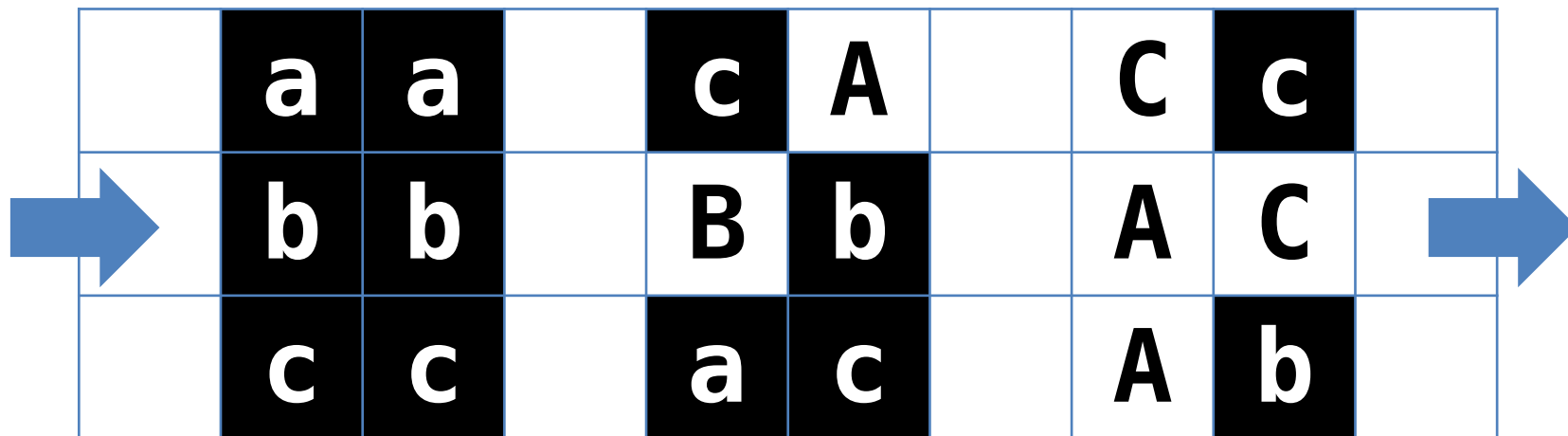
問題概要

- 3 行の盤, 2 列ずつアルファベットがある
- 大文字は通れる, 小文字は通れない
- 左端から右端まで行きたい

	a	a		c	A		C	c	
	b	b		B	b		A	C	
	c	c		a	c		A	b	

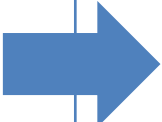
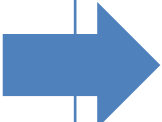
問題概要

- 26 個のスイッチ A, B, \dots, Z
- 対応する文字の 通れる / 通れない が入れ替わる



問題概要

- スイッチはスタート前にしか押せない
- 下の例は B と C を押すとクリア

	a	a		c	A		C	c	
	b	b		B	b		A	C	
	c	c		a	c		A	b	

問題概要

- ゴール可能かどうか判定せよ
- 可能なら押すべきスイッチの集合を 1 つ求めよ
- 制約
 - $M \leq 1,000$: アルファベットのブロックの数

解法

枝刈り探索

解法

- こんなブロックがあったら→
- 次のどれかをしないと通れない
 1. (A 押す) and (B 押さない)
 2. (C 押さない) and (D 押す)
 3. (E 押す) and (F 押す)

a	B
C	d
e	f

解法

- 次のすべてを満たすことと同値

- ① (A 押す) or (C 押さない) or (E 押す)
- ② (A 押す) or (C 押さない) or (F 押す)
- ③ (A 押す) or (D 押す) or (E 押す)
- ④ (A 押す) or (D 押す) or (F 押す)
- ⑤ (B 押さない) or (C 押さない) or (E 押す)
- ⑥ (B 押さない) or (C 押さない) or (F 押す)
- ⑦ (B 押さない) or (D 押す) or (E 押す)
- ⑧ (B 押さない) or (D 押す) or (F 押す)

a	B
C	d
e	f

解法

- "● or ● or ●" という形の条件が $8M$ 個あって、それらをすべて満たすようにスイッチを押すかどうか決める問題になった

解法

- 探索しましょう
 - 最初は各スイッチを押すかどうかは未定で,
"● or ● or ●" みたいな条件で分岐
- 枝刈りしましょう
 - 全探索したら 2^{26} 通り全部調べることに
 - $2^{26} > 60,000,000$

枝刈り

- 既に C を押すことが決まっているときに
"(A 押す) or (B 押す) or (C 押す)" みたいな条件がでてきたら分岐不要
- "(A 押す) or (A 押さない) or (B 押す)"
みたいな条件がでてきたら分岐不要
 - 何しても条件を満たしています

枝刈り

- "(A 押す) or (B 押す) or (C 押す)" みたいな条件で A を押して探索して失敗したら, A を押さないことにしてよい
- つまり, 条件 " a or β or γ " に対して以下の 3 パターンを調べれば十分
 - a
 - (not a) and β
 - (not a) and (not β) and γ

枝刈り

- これらの枝刈りを行うと, 高々 1.8393^{26} 通りにしか分岐しないことが示せます
 - $1.8393^{26} < 8,000,000$
 - 最大になんてきつとならないし間に合いそう?
- 今回はここまでやれば通せるはずですよ

証明

- スイッチが n 個のときに高々 $T(n)$ 通りにしか分岐しないとする
- 条件 "●" に対しては高々 $T(n - 1)$ 通り
- 条件 "● or ●" に対しては高々 $T(n - 1) + T(n - 2)$ 通り
- 条件 "● or ● or ●" に対しては高々 $T(n - 1) + T(n - 2) + T(n - 3)$ 通り
- $T(n) \leq T(n - 1) + T(n - 2) + T(n - 3)$
- よって $T(n) \leq 1.8393^{26}$
 - 1.8393 は方程式 $1 = x^{-1} + x^{-2} + x^{-3}$ の解

もう少し高速化

- スイッチが N 個とすると時間計算量 $O(1.8393^N M)$ になっている
- 同一の条件を取り除くと M が $O(N^3)$ に
 - つまり, 探索の分岐の末端 (一番計算量に影響する) では決まっていないスイッチは少ないので, 条件 8000 個くらい見るのは無駄
- これで $O(1.8393^N + M)$

もう少し枝刈り

- 条件を順番に見ていくのではなく
 - 分岐不要なものを優先して消す
 - "● or ● or ●" より "● or ●" を先に見る
 - もし "● or ● or ●" の形しか残っていなかったら?
 - どれかのスイッチを押す／押さないと選んだのに "● or ● or ●" しか残らなかったということは、その選択は今後影響を与えないということなので確定させてよい

もう少し枝刈り

- という感じでがんばると, 高々 1.6181^{26} 通りにしか分岐しないことが示せます
 - $1.6181^{26} < 300,000$
 - すごく間に合いそう!
- ここまでやればとても速いです
 - 今回の環境で < 0.25 秒 (130 ケース, C++)

参考

- つまり 3-SAT に変形して解いていました
- 一方, 元の問題は 3-SAT を含んでいます
 - 横に 2 個並ぶ文字が全部同じ場合
 - ということは, スイッチの個数に関する多項式時間で解けたら **P = NP** です

参考

- 3-SAT をランダムウォークを用いて解くモンテカルロアルゴリズムが知られています
 - スイッチが N 個のとき $O(1.3334^N)$ 時間で定数確率で解が見つかる
- が、今回は N が小さいので N の多項式ぶんが響いて意外と時間がかかります
 - 解が一意だったりすると結構な回数のループを回さないと見つかりません
 - うまくやると通せる模様

別解？

- 他にもいろいろな枝刈り探索が考えられると思います
- 計算量よくわからないと思いますががんばってください
 - ICPC では計算量がよくわからない枝刈り探索の問題が結構出題されます

結果

- Accepted / Trying Teams / Submission
 - 3 / 5 / 11
- Accepted Teams
 - hirosegolf (203:07)
 - anta (230:59)
 - tmt514 (288:08)