C: Casino

JAG 春コンテスト 2015

原案：岩田・保坂
解答：澤・保坂
解説：保坂

問題概要

- 確率 p で賭金が 2 倍になる
  - ただし賭金は正整数ドル
- 手持ち m ドルから始めて，n ドル以上にできる確率は？
- さらに最善の初手もすべて求めよ

- p は整数パーセント (この解説では 100 で割っておきます)
- $0 < m < n \leq 10^9$

自明な場合

- $p = 0$ のとき
  - 何をしても負けるに決まっている，確率 0.0
  - 最善初手は 1 以上 m 以下すべて

- $p = 1$ のとき
  - 何をしても勝てるに決まっている，確率 1.0
  - 最善初手は 1 以上 m 以下すべて

とりあえず定式化

- p, n を固定して，所持金 m から勝てる確率を z_m とおいて式を立てる：

  $z_0 = 0$, $z_n = 1$,

  $$z_m = \max_{1 \le d \le \min\{m, n-m\}} p\, z_{m+d} + (1-p)\, z_{m-d}$$

  - 適当な初期値から収束するまでループを回せば n が小さいときは解ける
    - 解の様子が知りたかったら実験しましょう
  - 解の一意性の証明は省略します
    - 複数解存在するとして，差をとるとわかる

有名な場合

- $p = 1/2$ のとき
  - 無駄をしなければ，つまり $n -$ (所持金) より多く賭けたりしなければ，勝てる確率は m/n
    - 証明の例：
      - 公平な賭けなので (martingale) 終了時の所持金の期待値も m 円
      - $z_m = m/n$ がさっきの不等式を満たすことを確認する
  - 最善初手は 1 以上 $\min(m, n - m)$ 以下すべて
    - $p = 0, 1$ のときちょっと違うので注意

有利な場合

- $p > 1/2$ のとき
  - 直感：期待値的には良いわけだから長時間やってれば勝てるっしょ！

有利な場合

- $p > 1/2$ のとき
  - 事実：１ドルずつ賭ける，が唯一の最適戦略
  - 証明：１ドルずつ賭けるとして勝率を求め，さっきの z_m の不等式を満たすことを示す

有利な場合

- $p > 1/2$ のとき
  - $z_m = p\, z_{m+1} + (1-p)\, z_{m-1}$
    - よくある 3 項間漸化式
    - $r = (1-p)/p$ とすると，$z_m = A + B\, r^m$ とおけて，$z_0 = 0$, $z_n = 1$ から解ける
  - 結果 $z_m = (1-r^m)/(1-r^n)$

有利な場合

- $p > 1/2$ のとき
  - $z_m = (1 - r^m)/(1 - r^n)$
  - $p\, z_{m+d} + (1-p)\, z_{m-d} = (1 + r - r^{m-d+1} - r^{m+d})/(1+r)/(1-r^n)$ は $d \geq 2$ のときは $z_m = (1 + r - r^m - r^{m+1})/(1+r)/(1-r^n)$ より小さいので OK

有利な場合

- $p > 1/2$ のとき (まとめ)
  - 確率は $(1 - r^m)/(1 - r^n)$
  - 初手は 1 のみ

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - 直感：期待値的に不利だから長引くとジリ貧, わんちゃん狙っていくしかない！

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - 事実：常に $\min\{(\text{所持金}), n - (\text{所持金})\}$ 賭けるのが最適，**ただし他にも最適戦略がある**
    - サンプルにもある
  - とりあえずその戦略仮定して確率を求めてみる

不利な場合

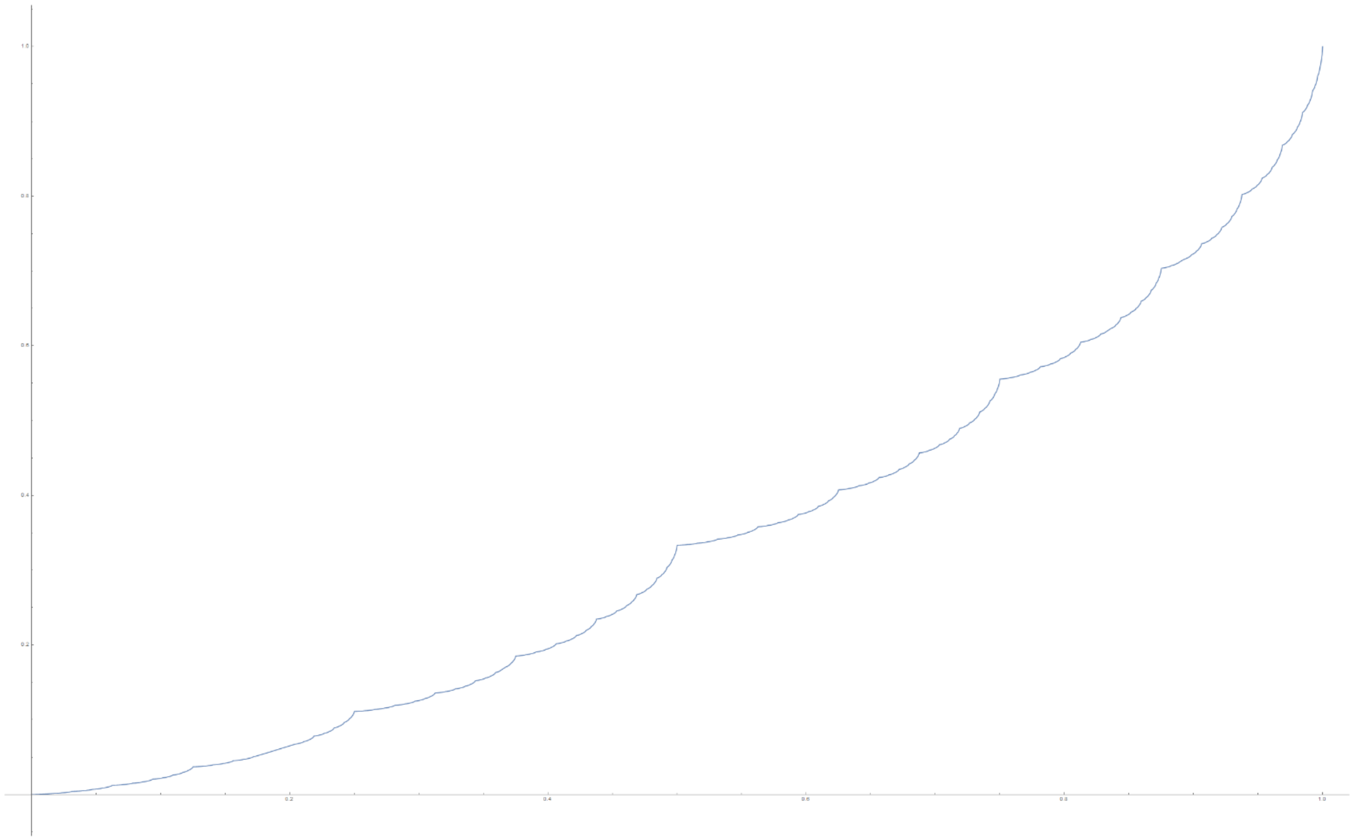
- $p < 1/2$ のとき
  - $z_m = p\, z_{2m} + (1-p)\, z_0 \ (m \le n - m)$
  - $z_m = p\, z_n + (1-p)\, z_{2m-n} \ (m \ge n - m)$
    - よく考えると，1 ドル単位とかが関係なくなり，z_m の値は m/n の値だけに依存している，ということで $f(m/n)$ とおき直す

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - f の値を求まるところから求めてみよう
    - $f(0) = 0, f(1) = 1$
    - $f(1/2) = p$
    - $f(1/4) = p^2, f(3/4) = 2p - p^2$
    - $f(1/8) = p^3, f(3/8) = 2p^2 - p^3, f(5/8) = p + p^2 - p^3, f(7/8) = 3p - 3p^2 + p^3$
  - 分母が二冪のところは求まる，二進展開に関係していそう

不利な場合

- $p = 1/3$ のときの f の様子



不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - がんばると次が予想できる：
  - x を二進展開して $x = \sum_{i \geq 0} 2^{e_i}$ のとき，$f(x) = \sum_{i \geq 0} r^i (r+1)^{e_i}$ (ただし $r = (1-p)/p$)
  - 上のように f を定義したとき，有理数 $x \geq \delta \geq 0$ に対して
    $$f(x) \geq p\, f(x+\delta) + (1-p)\, f(x-\delta)$$
    を示して，等号成立条件も知りたい

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - 有理数 $x \geq y \geq 0$ に対して
  $$f(x+y) \geq f(x) + r\,f(y)$$
  を示して，等号成立条件を求めればよい
    - $f(2x) = (r+1)\,f(x)$ を用いた

不利な場合

■ $f(x+y) \geq f(x) + r\,f(y)$ $(x \geq y \geq 0)$ の証明

x, y が二進有限小数の場合は末尾が 111 … ではないほうの二進表記に固定しておく．x の二進展開の最上位を 2^{e_0} として $x = 2^{e_0} + x'$ と表しておく ($f(x) = (r+1)^{e_0} + r\,f(x')$ である)．y の値によって場合分け．

(1) y の最上位も 2^{e_0} のとき

$y = 2^{e_0} + y'$ と表すと，$f(x+y) - f(x) - r\,f(y) = r\left(f(x'+y') - f(x') - r\,f(y')\right)$

(2) y の最上位が 2^{e_0} より小さく，$x+y$ が 2^{e_0+1} の位に繰り上がるとき

以下の両方が成り立つ：

$$f(x+y) - f(x) - r\,f(y) = (r-1)\left((r+1)^{e_0} - f(x')\right) + \left(f(x'+y) - f(x') - r\,f(y)\right)$$

$$f(x+y) - f(x) - r\,f(y) = (r-1)\left((r+1)^{e_0} - f(y)\right) + \left(f(x'+y) - f(y) - r\,f(x')\right)$$

(3) y の最上位が 2^{e_0} より小さく，$x+y$ が 2^{e_0+1} の位に繰り上がらないとき

以下の両方が成り立つ：

$$f(x+y) - f(x) - r\,f(y) = r(r-1)\,f(y) + r\left(f(x'+y) - f(x') - r\,f(y)\right)$$

$$f(x+y) - f(x) - r\,f(y) = r(r-1)\,f(x') + r\left(f(x'+y) - f(y) - r\,f(x')\right)$$

不利な場合

出てきた式について，$(r+1)^{e_0}-f(x')>0$, $(r+1)^{e_0}-f(y)>0$, $f(y)\geq 0$, $f(x')\geq 0$ に注意．2 本の式がある場合は x' と y の大小に従って選ぶことで，x, y から 2^{e_0} の位を取り除いた場合に帰着した式が得られる．これを繰り返すと，いつかは x, y の二進表記の循環節に入り，さらに循環節の長さの最小公倍数 (L とする) 回繰り返すと，ある $0\leq l\leq L$ に対して

$$f(x_1+y_1)-f(x_1)-r\,f(y_1)\geq r^l(f(x_1/2^L+y_1/2^L)-f(x_1/2^L)-r\,f(y_1/2^L))$$

が得られ，$r>1$ を用いると $f(x_1+y_1)-f(x_1)-r\,f(y_1)\geq 0$ を得て，$f(x+y)-f(x)-r\,f(y)\geq 0$ が従う．

等号成立条件は，途中で生じる $(r+1)^{e_0}-f(x')$, $(r+1)^{e_0}-f(y)$, $f(y)$, $f(x')$ がすべて 0 であること．言い換えれば，「x と y で違う桁があったら，そこから下の桁は一方は全部 0」ということになる．

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき
  - $z_m = f(m/n)$ が条件を満たすことはここまでの議論からわかる
  - 等号成立条件は，x, y を $(m+d)/n$, $(m-d)/n$ に置き換えて考えて，「m/n の二進展開に現れる “01” それぞれに対応して，$m = 2^{e+2}a + 2^e + b$ (a は整数，$0 \le b < 2^e$) と表したとき，$d = (2^e \pm b)\, n$ が候補」となる

不利な場合

- $p < 1/2$ のとき (実装)
  - 確率は m/n の二進展開から求めるが，途中で打ち切ればよい
    - 最悪ケースは $p = 0.01$ だが，小数第 e 位以降を打ち切ってもロスは高々 100×0.99^e，よって 10000 桁もやれば十分
  - 等号成立条件は，二進展開の下の方になると $d = (2^e \pm b)\,n$ が 1 ドル単位を下回るので，やはり途中で打ち切ればよい

ジャッジ解情報

- 澤： 85 行 2434 B (C++)
- 保坂： 144 行 3174 B (C++)

結果

- Accepted / Trying Teams / Submission
  - 1 / 3 / 17
- First Acceptance
  - すぬけ ブースター feat. GUMI (294:17)