Problem J

Longest Shortest Path

JAG 模擬地区予選 2015

原案：岸本

解答：岸本・澤・水野

解説：矢野

問題概要

- 有向グラフが与えられる ($|V| \leq 200, |E| \leq 2000$)
- 各辺は長さ d_e とコスト c_e を持っており、$x \cdot c_e$ のコストを払うことで辺の長さを x 長くすることができる
- 合計 L 以下のコストで s-t 最短路をどれだけ長くできるか？

双

对

双対

最適化問題だと思うと
次のような関数（+諸々の制約）の最大化になる

$$\max \min (s\text{-}t \text{ パス})$$

最適化問題だと思うと
次のような関数（+諸々の制約）の最大化になる

$$\boxed{\max\min}\,(s\text{-}t\ \text{パス})$$

この部分が邪魔

最短路問題の**双対**が
差分制約の最大化問題だったことを思い出すと
次のような形の線形計画問題に変形できる
(p_v を各頂点のポテンシャルを表す変数とする)

$$
\begin{array}{lll}
\max & p_t - p_s & \\
\mathrm{s.t.} & p_v - p_u \le x_e + d_e & \text{(for all } e = (u, v) \in E \text{)} \\
 & \sum c_e x_e \le P & \\
 & x_e \ge 0 &
\end{array}
$$

これでめでたく最小化の部分が消えた！！

この線形計画問題を**ぐっと睨むと**、
最小費用流の**双対問題**に見えてくるので
とりあえず**双対**を取ってみる

$$
\begin{array}{lllll}
\max & p_t - p_s & & & \\
\mathrm{s.t.} & p_v - p_u & \leq & x_e + d_e & \text{双対変数: } f_e \\
 & \sum c_e x_e & \leq & P & \text{双対変数: } y \\
 & x_e & \geq & 0 &
\end{array}
$$

この線形計画問題を**ぐっと睨むと**、
最小費用流の**双対問題**に見えてくるので
とりあえず**双対**を取ってみる

$$\min \quad \sum d_e f_e + Py$$

$$\text{s.t.} \quad \sum(v\text{から出る辺の}f_e) - \sum(v\text{に入る辺の}f_e) \geq 0 \qquad (v \in V \setminus \{u, v\})$$

$$\sum(s\text{から出る辺の}f_e) - \sum(s\text{に入る辺の}f_e) \geq 1$$

$$\sum(t\text{から出る辺の}f_e) - \sum(t\text{に入る辺の}f_e) \geq -1$$

$$c_e y - f_e \geq 0 \qquad \text{(for all } e \in E\text{)}$$

$$f_e \geq 0$$

この線形計画問題を**ぐっと睨むと**、
最小費用流の**双対問題**に見えてくるので
とりあえず**双対**を取ってみる

最小費用流のコスト

$$\min \quad \boxed{\sum d_e f_e} + Py$$

流量保存則

$$\text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} \sum(v\text{から出る辺の}f_e) - \sum(v\text{に入る辺の}f_e) \geq 0 & (v \in V \setminus \{u, v\}) \\ \sum(s\text{から出る辺の}f_e) - \sum(s\text{に入る辺の}f_e) \geq 1 & \\ \sum(t\text{から出る辺の}f_e) - \sum(t\text{に入る辺の}f_e) \geq -1 & \\ c_e y - f_e \geq 0 & (\text{for all } e \in E) \\ f_e \geq 0 & \end{array}$$

この線形計画問題を**ぐっと睨むと**、
最小費用流の**双対問題**に見えてくるので
とりあえず**双対**を取ってみる

$$
\begin{array}{lll}
\min & \sum d_e f_e + Py & \\
\mathrm{s.t.} & (\ f \text{ は } s \text{ から } t \text{ の流量 } 1 \text{ のフロー}\ ) & \\
& c_e y - f_e \ \geq \ 0 & (\text{for all } e \in E) \\
& f_e \qquad\quad\ \geq \ 0 &
\end{array}
$$

これでめでたく最小費用流の形に近くなった！！

この線形計画問題を再び**ぐっと睨んで**、
$y \to 1/m$, $f_e \to f_e/m$ と置き換えてみる

$$\min \quad (\sum d_e f_e + P)/m$$

$$\text{s.t.} \quad (\ f \text{ は } s \text{ から } t \text{ の流量 } m \text{ のフロー}\ )$$

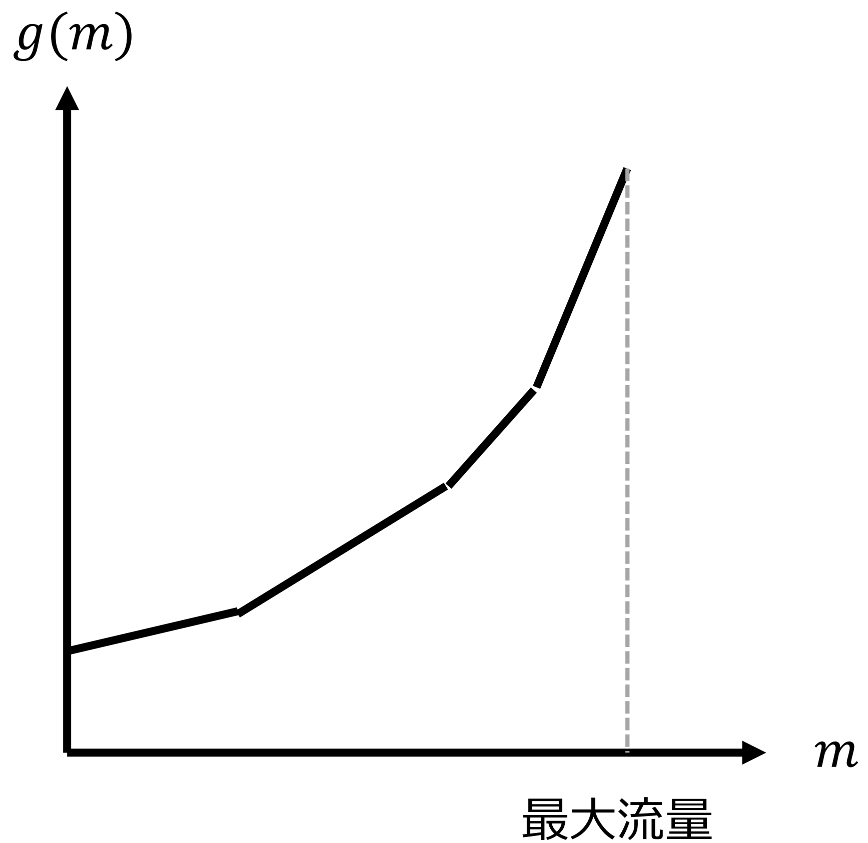
$$0 \le f_e \le c_e \qquad \text{(for all } e \in E\text{)}$$

$$m > 0$$

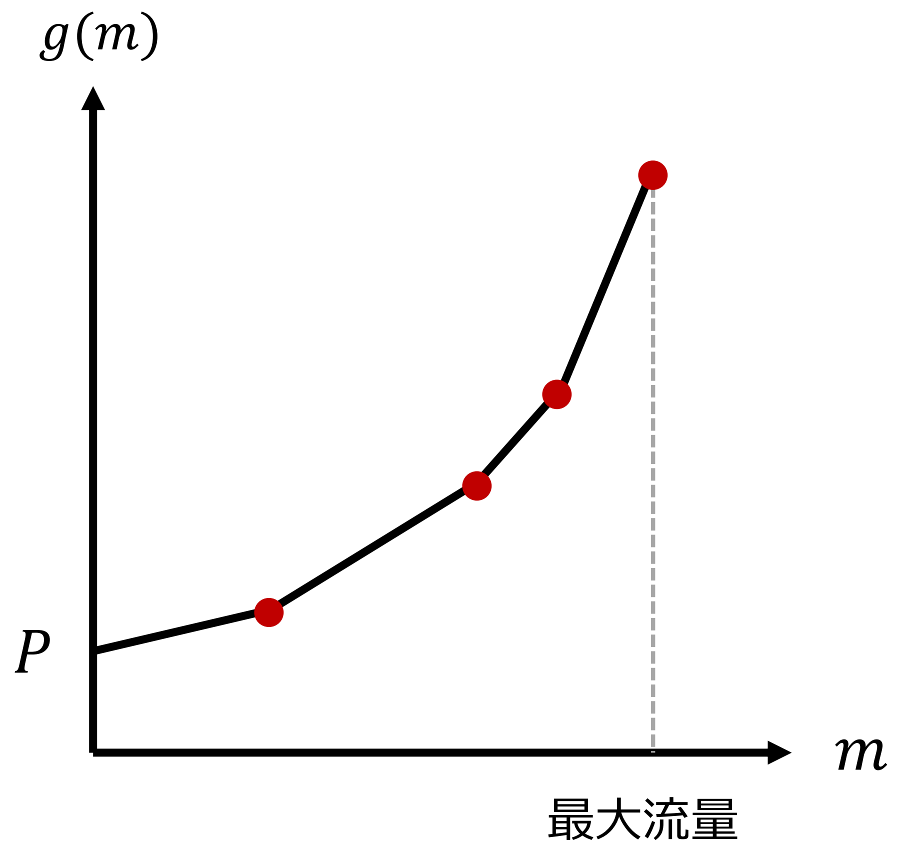
目的関数の m の部分が無ければ最小費用流！

$g(m) = \sum d_e f_e + P$ と置くとこの値はフローで求まる

$g(m) = \sum d_e f_e + P$ の関数形はこのような感じになる



$g(m) = \sum d_e f_e + P$ の関数形はこのような感じになる



$g(m)/m$ が最小になり得るのはこれらの部分のみ
→ 最短路反復法 (Primal-Dual) で最短路を求めるたびに
$g(m)/m$ を計算してその最小値を求めればよい！

統計

- Accepted / Submissions

  0 / 2 (0 %) (onsite)

  1 / 7 (14 %) (overall)

- First Acceptance

  -- (-- : --) (onsite)

  bcw0x1bd2 (204:37) (overall)