Optimal Tournament

- 原案： 岸本
- 問題文： 田中
- 解答： 岸本，田中，澤
- 解説： 澤

問題概要

N 人のトーナメントを作りたい．トーナメントは，葉に人間を割り当てた二分木のことを指す．

N 人はそれぞれ強さのパラメタ A_i を持っており，これが強い方が勝つ．

i と j が戦った時，その "つまらなさ" 度合いを $|A_i - A_j|$ で定義する．"つまらなさ" の和を最小化するトーナメントを作れ．

ただし，どの人についても，"その人がすべて勝てたとしたときに，優勝するまでに戦う回数" を K 以下にせよ．

アイディア(1)

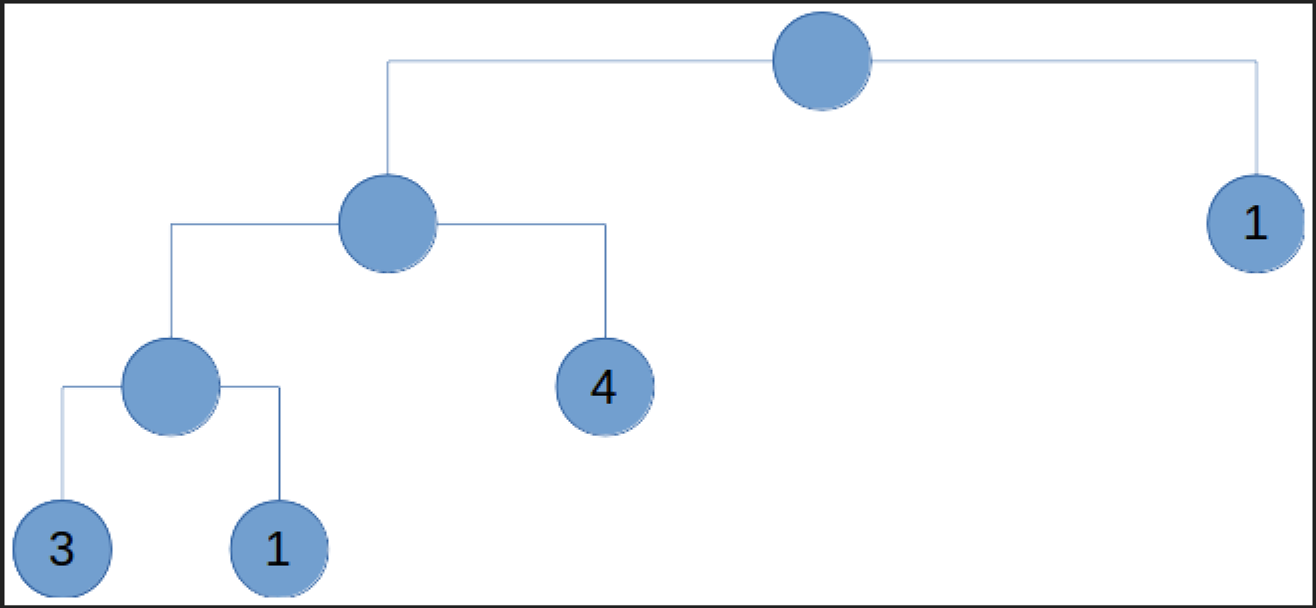
入力は A_i の降順でソートしておく．

すると，最適なトーナメントを表す木(以下単にトーナメント木)であって，”どの頂点も，その子孫として含む葉は，連続する人間に対応する” ようなものが存在する．

つまり，葉がソートされたようなトーナメント木のみを考えればよい．

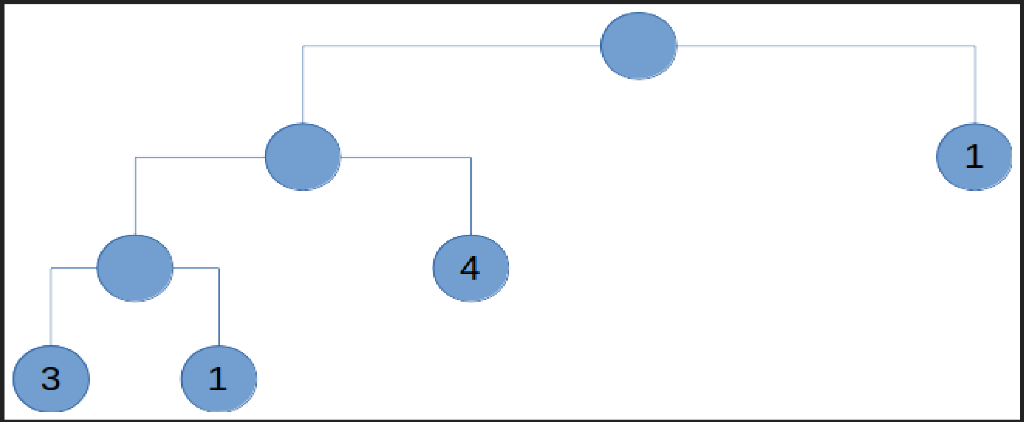
証明の概略

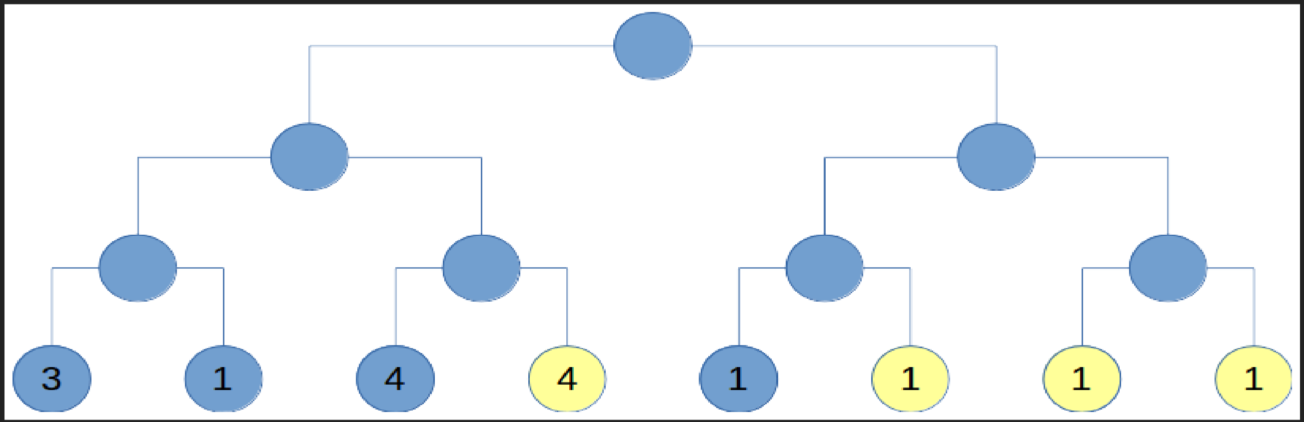
- トーナメント木を一つ取ってくる.



証明の概略

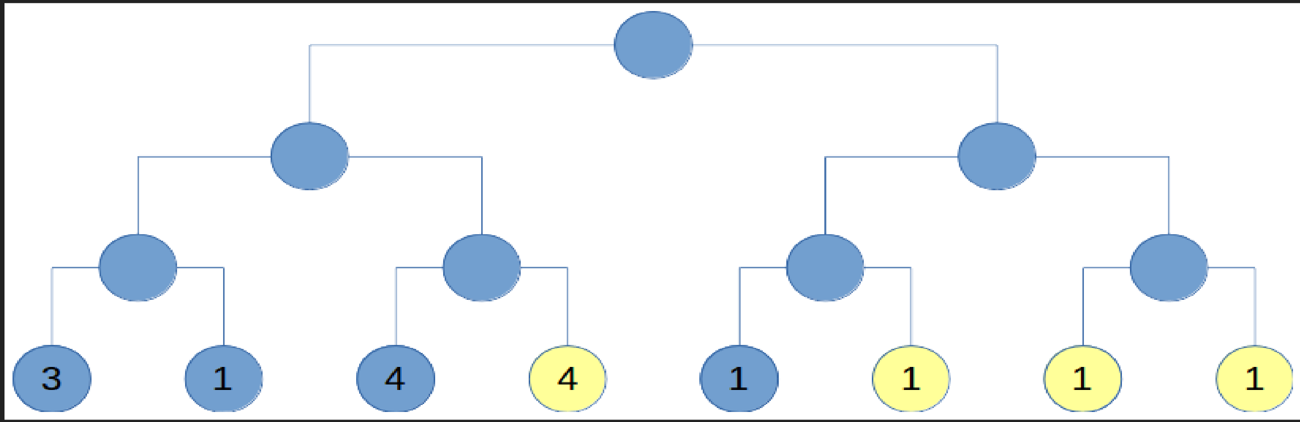
- 頂点，チームを生やして，深さ K の完全二分木になるよう補完.(目的関数値は同じ)

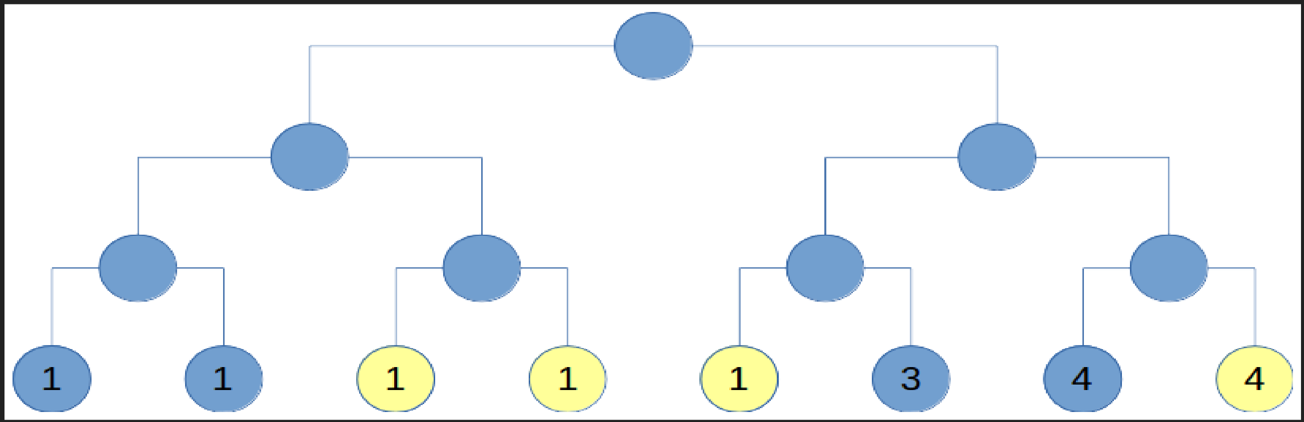




証明の概略

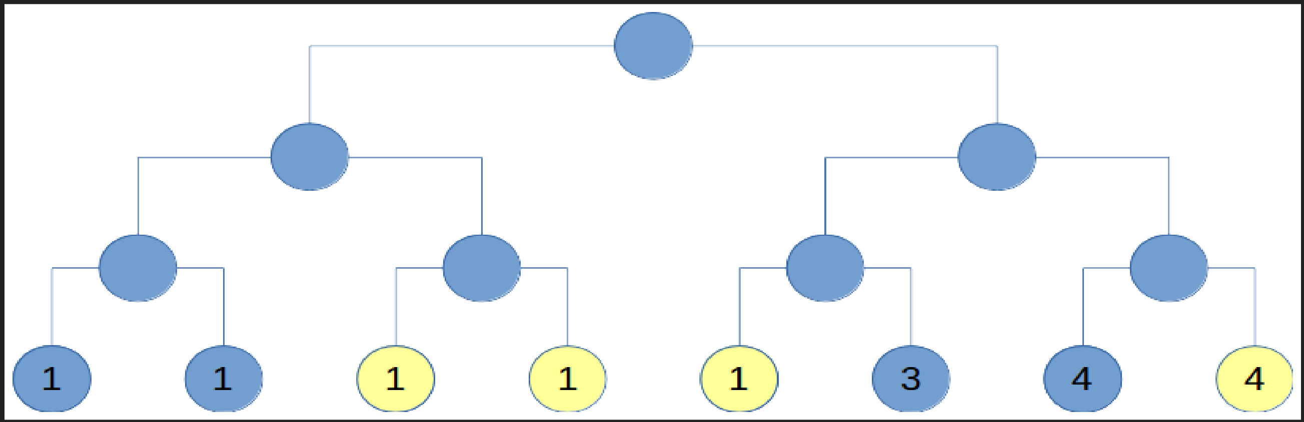
- $2^K = N$ な時は，葉をソートすれば最適．(これも証明が必要)

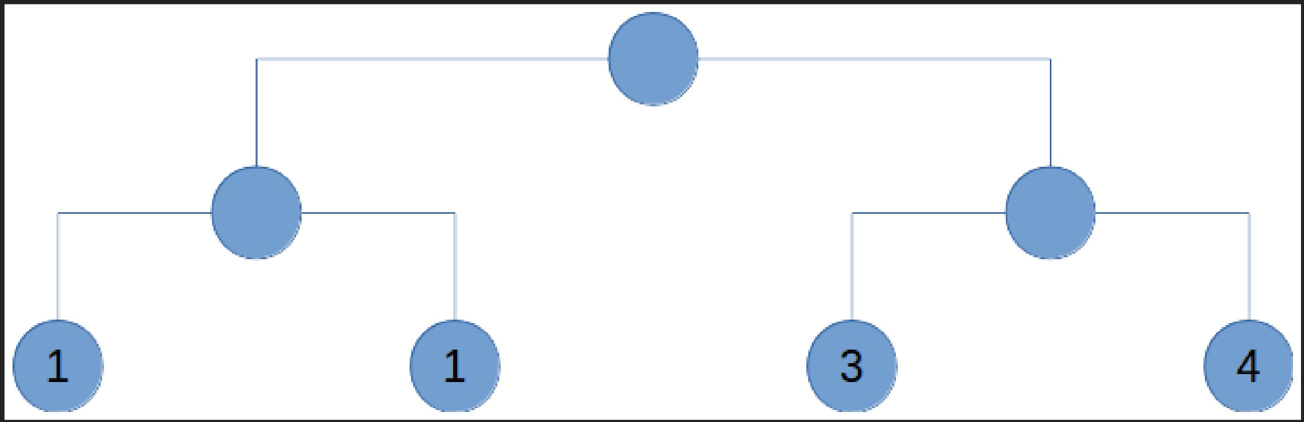




証明の概略

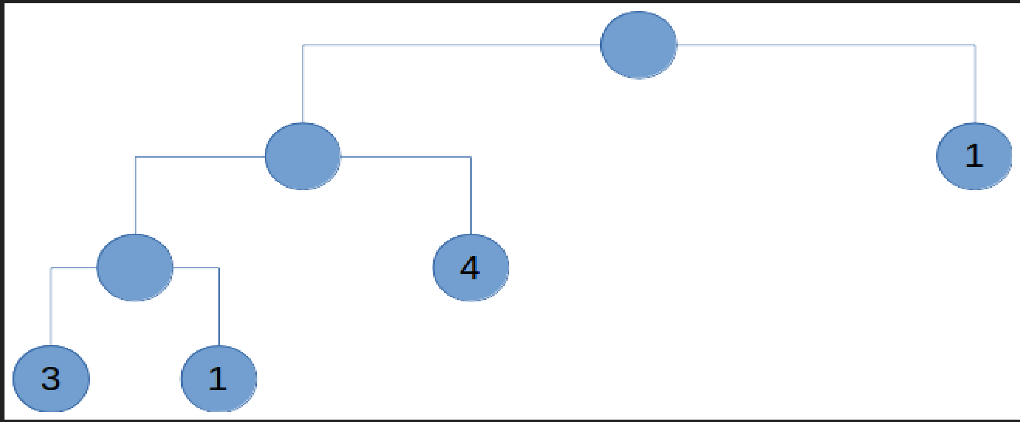
- 生やした余分な頂点を削除する.(目的関数値は下がらない)

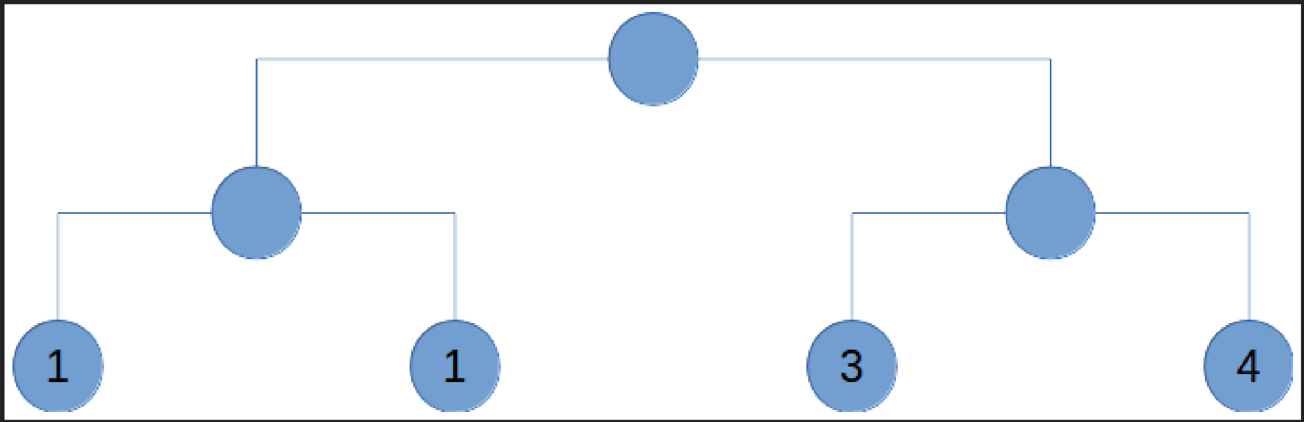




証明の概略

- 葉がソートされたトーナメント木で，元のよりも目的関数値が大きくならないものができた．





動的計画法

葉がソートされたトーナメント木のみ考えればよいことから，次の動的計画法で解ける．

$DP_i[l, r]$ ： $A_l, \dots, A_{r-1}$ を使って深さ i 以下のトーナメント木を作るときの，つまらなさの和の最小値．

として，

$$DP_0[l, r] = \max(r - l - 1, 0) * INF,$$
$$DP_i[l, r] = \min_{l \le m \le r} DP_{i-1}[l, m] + DP_{i-1}[m, r] + A_m - A_l.$$

ただし，INF は十分大きい値．

アイディア(2)

このまま計算すると，$\mathcal{O}(KN^3)$．

Monge

アイディア(2)

DP_i は Monge 性を持つ．

具体的には，任意の $l \leq r \leq s \leq t$ に対し，

$$DP_i(l,t) + DP_i(r,s) \geq DP_i(l,s) + DP_i(r,t)$$

を満たす．

アイディア(2)

Monge 性は，数学的帰納法と，DP_i が

$$f(l,r) = DP_{i-1}(l,r) + A_l$$

と

$$g(l,r) = DP_{i-1}(l,r) - A_l$$

の "畳込み"

$$h(l,r) = \min_{l<=m<=r} f(l,m) + g(m,r)$$

であることを利用すると，証明できる．

アイディア(2)

Monge 性を使うと，DP が速くでき，$\mathcal{O}(KN^2)$ にできる．

詳しくは，例えば 前原さんのBlog を参照．

ジャッジ解

- 岸本 C++ 83行
- 田中 Java 58行
- 澤 C++ 40 行

統計情報

- AC/try/submission
  - 4/8/21
- FA
  - yutaka1999 166:10

おまけ (ソートしてよいことの証明の道筋)

チームの強さに重複があってもよいものとする．

補題1：与えられたトーナメント木に対し，一つのチーム 0 の強さを A_0 から $A_0 - d$ にすると，目的関数値の増分は高々 $+d$.

証明：元々のトーナメントでチーム 0 が戦った相手を，その順に $1, \ldots, t$ とする．t に関する数学的帰納法で示せる．

補題2：チームが追加されて，もとより最適値が下がることはない．(同じことだが，チームが削除されて，もとより最適値が上がることはない.)

証明：補題1を用いる．

補題3:

$N=2^K$ の場合，従って，トーナメント木が深さ K の完全二分木に固定されているとする．

$A_0 \leq \cdots \leq A_{N-1}$ と，ソートされているものとする．

このとき，左から i (0-origin) 番目の葉に A_i を割り当てるトーナメント木が，最適解の一つである．

証明:

補題1と補題2を用いる．

最初に，最も弱いチーム2つが隣り合うように出来ることを示し，そこから順に強い方まで示す．

その後，高さ $K-1$ の $N/2$ チームの状況に還元する．

命題4:

$A_0 \leq \cdots \leq A_{N-1}$ と，ソートされているものとする．

このとき，最適なトーナメント木であって，左から i (0-origin) 番目の葉に A_i を割り当てるものがある．

証明:

前に示したとおり．