

Problem G
紐とリング
解説（簡易版）

https://jag2016-domestic.contest.atcoder.jp/tasks/jag2016secretspring_g

JAG模擬国内予選A 2016

原案：宮村

解答：矢野・澤

解説：矢野

最初の一歩

(問題文はコンテストページをご覧ください)

- 輪を頂点、2色の紐を辺と見なすと、入力は2色の辺を持つグラフであるとみなすことができる。
- また、入力形式からも分かるように黒い紐で繋がれていない輪のペアは必ず白い紐で繋がれているため、白い紐を無視すると単なるグラフであるとみなすことができる。
- これらを踏まえてグラフの問題に再定式化してみるとどうなるか？

再定式化

入力として、次のように再帰的に定義された「よいグラフ」が与えられる。

- 1頂点のグラフは「よいグラフ」である
- 2つの「よいグラフ」の union (頂点集合・辺集合ともに和集合を取ったグラフ) は「よいグラフ」である
- 「よいグラフ」の補グラフは「よいグラフ」である
- 上記で定義されたグラフのみが「よいグラフ」である

入力されたグラフの頂点集合を2つに分けたときに、その間を結ぶ辺の数の最大値を答えよ。

再定式化

入力として、次のように再帰的に定義された「よいグラフ」が与えられる。

- 1頂点のグラフは「よいグラフ」である
- 2つの「よいグラフ」の union (頂点集合・辺集合ともに和集合を取ったグラフ) は「よいグラフ」である
- 「よいグラフ」の補グラフは「よいグラフ」である
- 上記で定義されたグラフのみが「よいグラフ」である

入力されたグラフの頂点集合を2つに分けたときに、その間を結ぶ辺の数の最大値を答えよ。

最大カット : 一般にはNP完全 (絶望)

再定式化

入力として、次のように再帰的に定義された「よいグラフ」が与えられる。

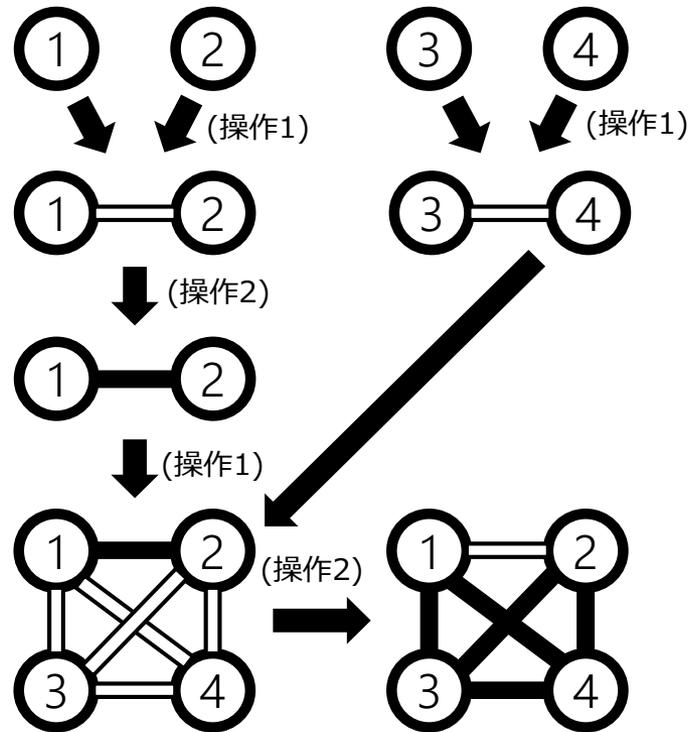
- 1頂点のグラフは「よいグラフ」である
- 2つの「よいグラフ」の union (頂点集合・辺集合ともに和集合を取ったグラフ) は「よいグラフ」である
- 「よいグラフ」の補グラフは「よいグラフ」である
- 上記で定義されたグラフのみが「よいグラフ」である

入力されたグラフの頂点集合を2つに分けたときに、その間を結ぶ辺の数の最大値を答えよ。

最大カット：一般にはNP完全なので
入力の特殊性を用いてがんばる

考察1

問題文中の図のように作り方が与えられていた場合は解けるだろうか？



木DP

構成方法を木だとみなして、各部分グラフごとに、カットの片方の頂点集合を i 個にした時の最大カットを覚えておくと DP で計算できそう

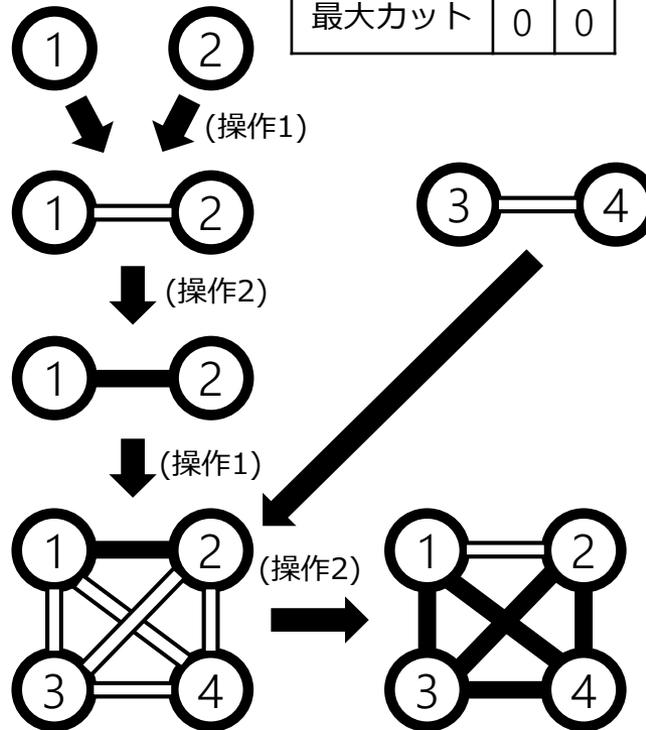
頂点数	0	1
最大カット	0	0

頂点数	0	1
最大カット	0	0

頂点数	0	1	2
最大カット	0	0	0

頂点数	0	1	2
最大カット	0	0	0

頂点数	0	1	2
最大カット	0	1	0



頂点数	0	1	2	3	4
最大カット	0	1	1	1	0

頂点数	0	1	2	3	4
最大カット	0	3	4	3	0

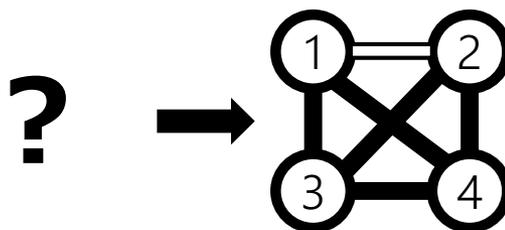
木DP

木の高さは $O(\sqrt{m})$ (証明略) なので愚直にやると $O(n^2\sqrt{m})$ に見えるが、実は何も考えなくても $O(n^2)$ になっている

(cf. <http://topcoder.g.hatena.ne.jp/iwiwi/20120428>)

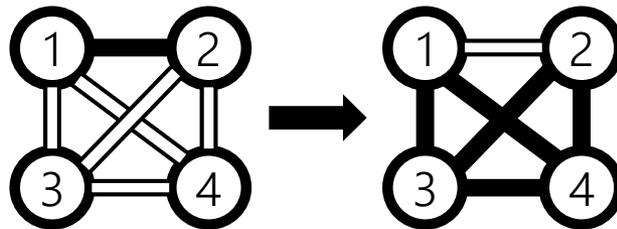
構築方法の復元

それではどのようにすれば入力から構築方法を復元できるだろうか？



考察2

- ここではグラフの連結性に着目する。
- Union を取ったあとは必ず非連結。
- したがって、グラフが連結な場合は最後の操作が補グラフを取る操作であったことがわかる。
- また、非連結だった場合は Union を取る操作をしたと考えるとよい。
- ここでの問題は、補グラフを取った後のグラフを連結成分に分解することで、補グラフ中の辺の数は $O(n^2)$ なので、愚直に分解していくと $O(n^2\sqrt{m})$ かかるので工夫する。（類題：<http://codeforces.com/contest/190/problem/E>）



等価な定式化

実は、「よいグラフ」を次のように定義しても等価である。

- 1頂点のグラフは「よいグラフ」である
- 2つの「よいグラフ」の union は「よいグラフ」である
- **2つの「よいグラフ」の join は「よいグラフ」である**
- 上記で定義されたグラフのみが「よいグラフ」である

(join とはもともと異なるグラフに属していた頂点同士をすべて辺で結ぶような操作である)

以上のような定式化を考えると、補グラフを考える必要がなくなり若干見通しが良くなる

ちなみに「よいグラフ」は cograph と呼ばれるグラフクラスです。

統計

First Acceptance

anta (103 : 41)