F.
All your base are belong to us

原案 : tokoharu
各種問題準備 : not
解説スライド : tokoharu

問題概要

- 2次元平面上にN点異なる点があります。
- 位置(x, y)に基地を配置すると、次のコストがかかります
  - N点それぞれについて距離を求め、距離が大きいK個の和
- コスト最小値はいくつですか？

例

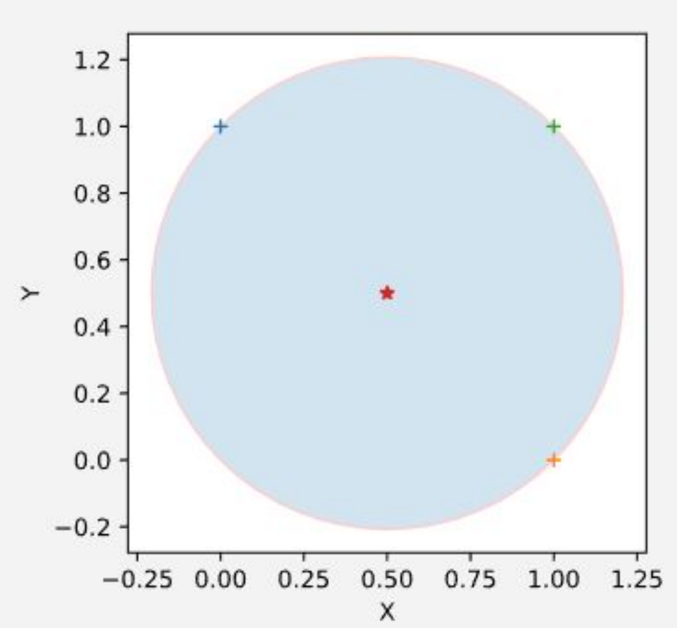
入力は3点 (0,0), (0,1), (1, 0)で、K=1

このとき、(1/2, 1/2)が最適です。

sqrt(2)/2 が答え。

K=2でも、同じ位置が最適です。

sqrt(2)/2 + sqrt(2)/2 = sqrt(2)が答え。



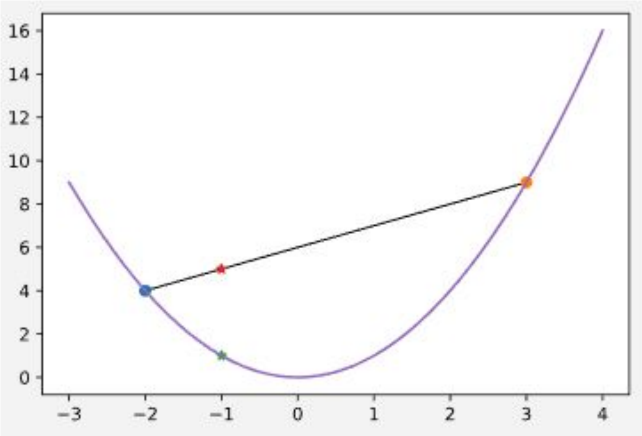
解法のアウトライン

実は**凸関数**です（証明は次ページより）

よって、3分探索したり山登りをすることでACを獲得できます

難しい問題に見えたかもしれませんがハッタリでした

証明(1. 定義と性質)



凸関数

関数 f : R^k→R が凸関数であるとは、任意の x, y ∈R^kと、a ∈ [0,1]に対して、次が成り立つことを言います : f(ax + (1-a)y) ≦ a f(x) + (1-a) f(y)

凸関数の性質

関数f, gが凸関数ならば、次の形で表される関数 hも凸関数です。

(1) h(x) = f(x) + g(x)　(2) h(x) = max(f(x), g(x))

証明（2. メイン）

距離関数 f(x, y) = sqrt(x^2 + y^2) は凸関数です。

したがって、f_i(x, y) := (i番目の点から点(x, y)までの距離) も凸関数です。

N個のうち、K個の点を選び、選ばれたiに対して和を取った[g(x,y) = sum(f_i(x, y))]としても、これは凸関数です。

C(N, K)通りの点の選び方それぞれに対して関数g は凸関数であり、それらに対してmaxを取った関数hもまた凸関数です。

この関数hは求めたかった関数と等価ですので、証明完了です。

（この証明はnotさんが考えてくれました。ありがとうございます。）

注意

凸関数は強い仮定のある関数です

山登り法や三分探索は凸関数より広いクラスの関数でも正しく動作することに注意してください

余談

金融の世界にはValue-at-Risk(VaR)と、Conditional Value-at-Risk(CVaR)という概念があります。

数理的には、各銘柄ごとにx%以下の確率でy円だけ損してしまう、という確率密度関数のような形でモデル化して、保有している金融資産のリスクの見積もりを行います。

VaRとは、「最悪x%の状況下では最良でもy円損する」ことを表現するもので、VaR(x) = yと書くことにします。複数の金融商品を組み合わせることができるという状況下はでVaR(x)を最小化したいという欲求は当然生じますが、こういうのは大概NP-hardな問題になります。

そこで、CVaRという概念が登場します。CVaR(x)は「最悪x%の条件が付いた平均損失」に相当します。VaRをCVaRに置き換えるだけで性質がよくなり、VaRではとても解けない問題が解けることもあります。

本問題はCVaRの概念を、より平易な問題に落としこんだ問題と解釈することもできると思います。単にK番目に大きいコストだと難しいが、K番目**まで**のコスト和だと簡単になることもあるということです。

正解チーム一覧

FA	unlimited_greedy	(1:41)
	UKUNICHIA	(3:57)
	maroon_rk	(4:29)
	Apollopia	(4:39)