J: Prefix Suffix Nim

（左崎・右男）

原案: nuip, potetisensei
解法: nuip
テスト: potetisensei

問題概要

- 数列を使ったゲームがある

- {0,1, .. S} からなる長さ n の数列すべてに対してゲームをプレイしたとき、先手が勝つのは何回？

解法概要

- どちらが勝つかは、左端の要素、右端の要素、最小値の3つのみによる
- 頑張って式をたてると、こういう部分の計算に困る

$$S^n - (S-1)^n + (S-2)^n - \cdots - 2^n + 1^n$$

- ベルヌーイ数というものを求めると、これは高速に計算できることが知られているので、帰着させる

$$S^n + (S-1)^n + (S-2)^n + \cdots + 2^n + 1^n$$

左崎が勝つための必要十分条件

- 自分の側の数が0になると困るので、相手の側の数を減らしたい
  - 全部の項から1を引きたい

- この操作はmin(a_1, a_2, … , a_n) 回しかできない。その後は？
  - 何をしても同じ。端っこの項（ a_1かa_n）だけから1を引くことにする。

- こんなかんじでゲームの進行する様子を想像すると、必要十分条件は
  - a_1 > a_n
  - a_1 = a_n かつ min(a_1, a_2, … , a_n) が奇数

これは何通りか

- a_1 > a_n
  - ひっくり返すと右男の勝ちになるので、a_1 ≠ a_n であるもののうち半分がこれ

$$\frac{(S+1)^n-(S+1)^{n-1}}{2}$$

- a_1 = a_n かつ min(a_1, a_2, … , a_n) が奇数
  - 「最小値がk以上のもの」は (S+1-k)^(n-1) 通りある
  - 「最小値がk以上のもの」であって「最小値が k+1以上のもの」でないものが「最小値がちょうど kであるもの」なので、計算するとこんな感じの式になる

$$S^n-(S-1)^n+(S-2)^n-\cdots-2^n+1^n$$

k乗和からk乗交代和を求める

- nまでのk乗和にk乗交代和を足すか引くと、nまでの偶数のk乗和になる。

- nまでの偶数のk乗和は、2^k をくくりだすとn/2までのk乗和になる

-

ac