E. 成績上昇大作戦

原案・データセット：not
問題文：smiken
解答：climpet, hec, hos, not, smiken

問題概要

- M科目のテストをN日行う
- 日付の順番を変えることで広義単調増加である科目の数を最大化せよ

- $N \leqq 1000$, $M \leqq 40$

解法

- どうやっても広義単調増加が両立しない科目のペアを求める
  - $a_{ix} < a_{jx}$ かつ $a_{iy} > a_{jy}$ ならばxとyは両立しない
  - x, yをキーにしてソートすれば判定できる
  - $O(NM^2 \log N)$
- このようなペアを含まない科目の集合はすべての要素を広義単調増加にできる

解法

- 「このようなペアを含まない科目の集合はすべての要素を広義単調増加にできる」の証明
  - 科目の集合 X とし、各要素を x_i とする
  - $x_1, x_2, \ldots$ をキーとしてソートする
  - 結果で $a_{i,x} > a_{i+1,x}$ となる要素 x があったとする
  - 仮定より $a_{i,y} \geqq a_{i+1,y}$ $(y \in X)$ なので、iとi+1を交換すればソートできているので矛盾
  - よってすべての要素を広義単調増加にできる

解法

- 科目を頂点とし、ペアを辺としたグラフを考える
- このグラフ上で辺を共有しない頂点集合のうち、集合のサイズが最も大きいものを求めたい

  ➡ 最大独立集合

- 半分全列挙 $O(2^{M/2} M)$ や枝刈探索 $O(1.381^{M} M)$ などで解ける

結果

- First AC : UT a.k.a Is (54:40)
- Accepted : 21 teams