競プロは
小惑星探査の役に立つ

ICPC 模擬国内予選 2020 G問題

ICPC OB/OG の会

原案: amylase
入力: not, climpet
解答: not, climpet, amylase, smiken
解説: amylase

問題

- 2次元平面上に多角形がたくさんある
- 多角形の中に入らないように、折れ線をたどって移動できる
- 線分の移動コストはｙ座標の上昇分（下降時は0）
- 始点と終点の組がクエリとしてたくさん与えられるので、それぞれについて最小の移動コストを求めてください。

1クエリ版 $O(V^3)$ の解法

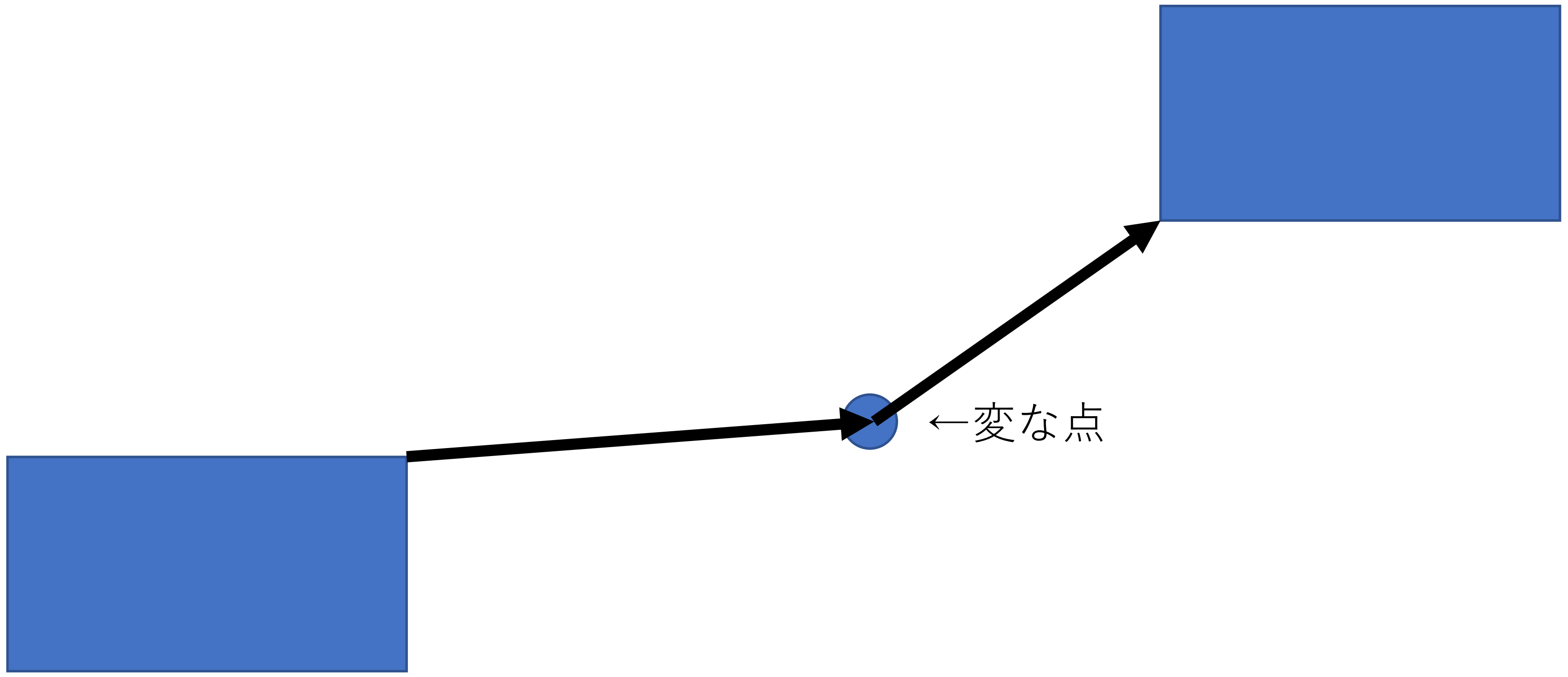
- **多角形の頂点・始点・終点以外は無視できる**
  - これらの点の個数を V とする
- 可視な2点間を相互に結んで最短経路問題を解く
- 可視な2点が $O(V^2)$ 個
- 辺の数が $O(V)$ 個あるので可視かどうかの判定が $O(V)$ 時間

1クエリ版 $O(V^3)$ の解法

- 多角形の頂点・始点・終点以外は無視できることの証明
- ある最短経路で変な点を経由していても消せることを示します

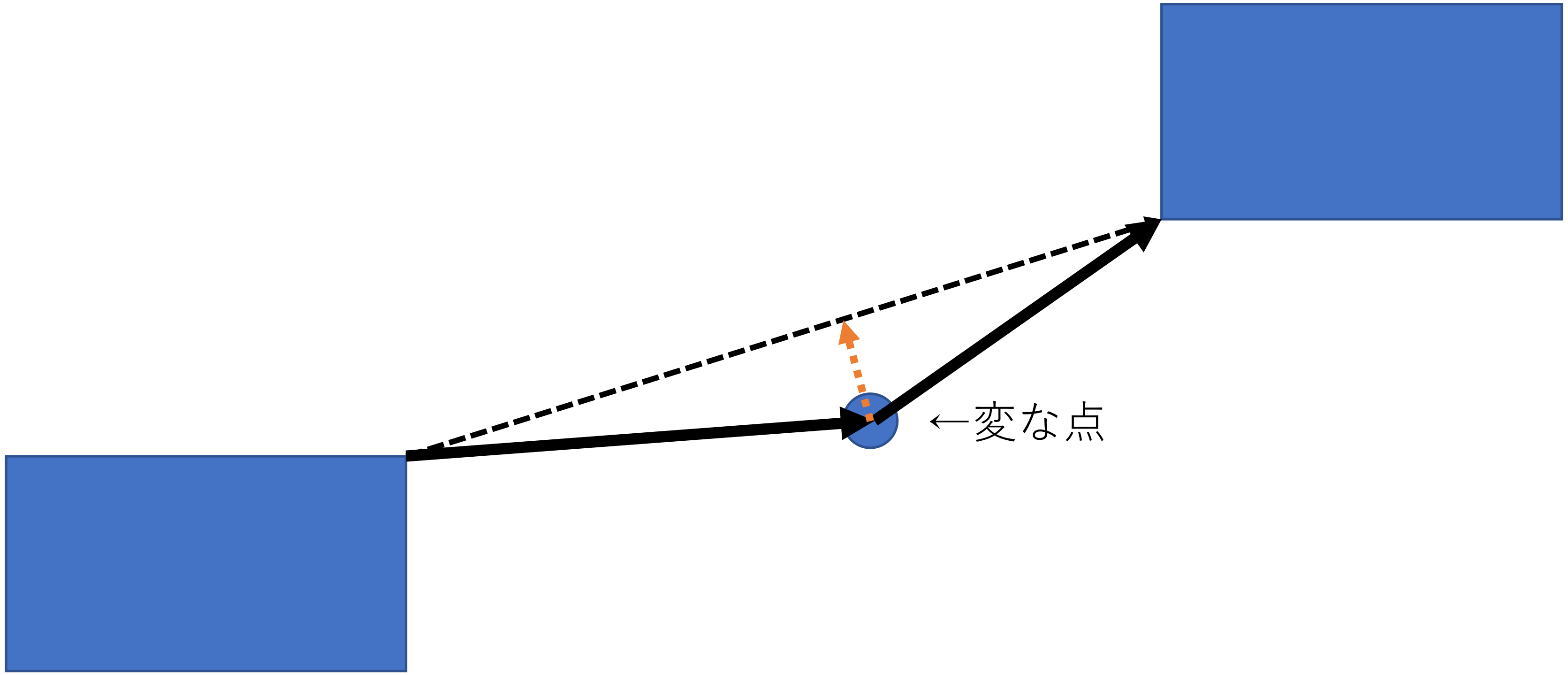
変な点を経由していても消せる

- 以下のような経路を考える



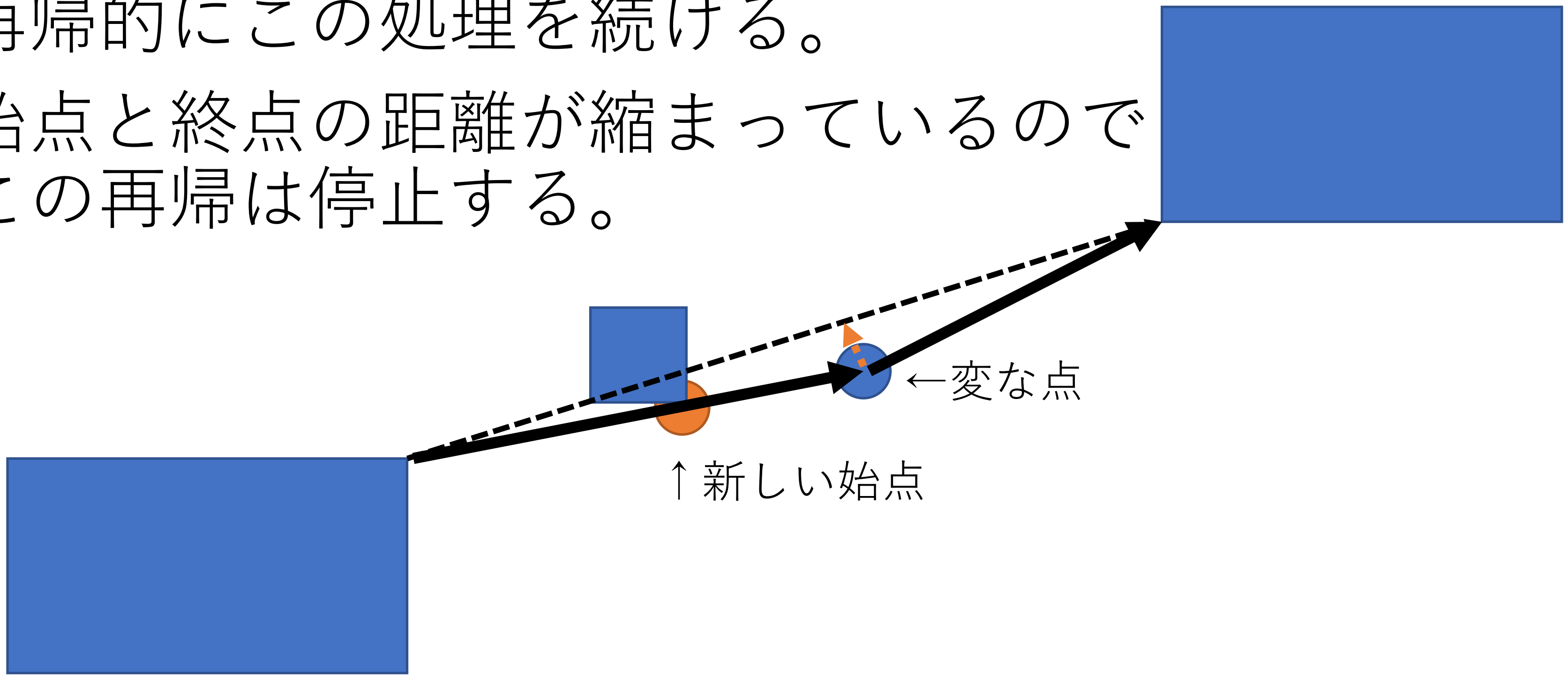
変な点を経由していても消せる

- 変な点を直接結んだ線分に近づけていく



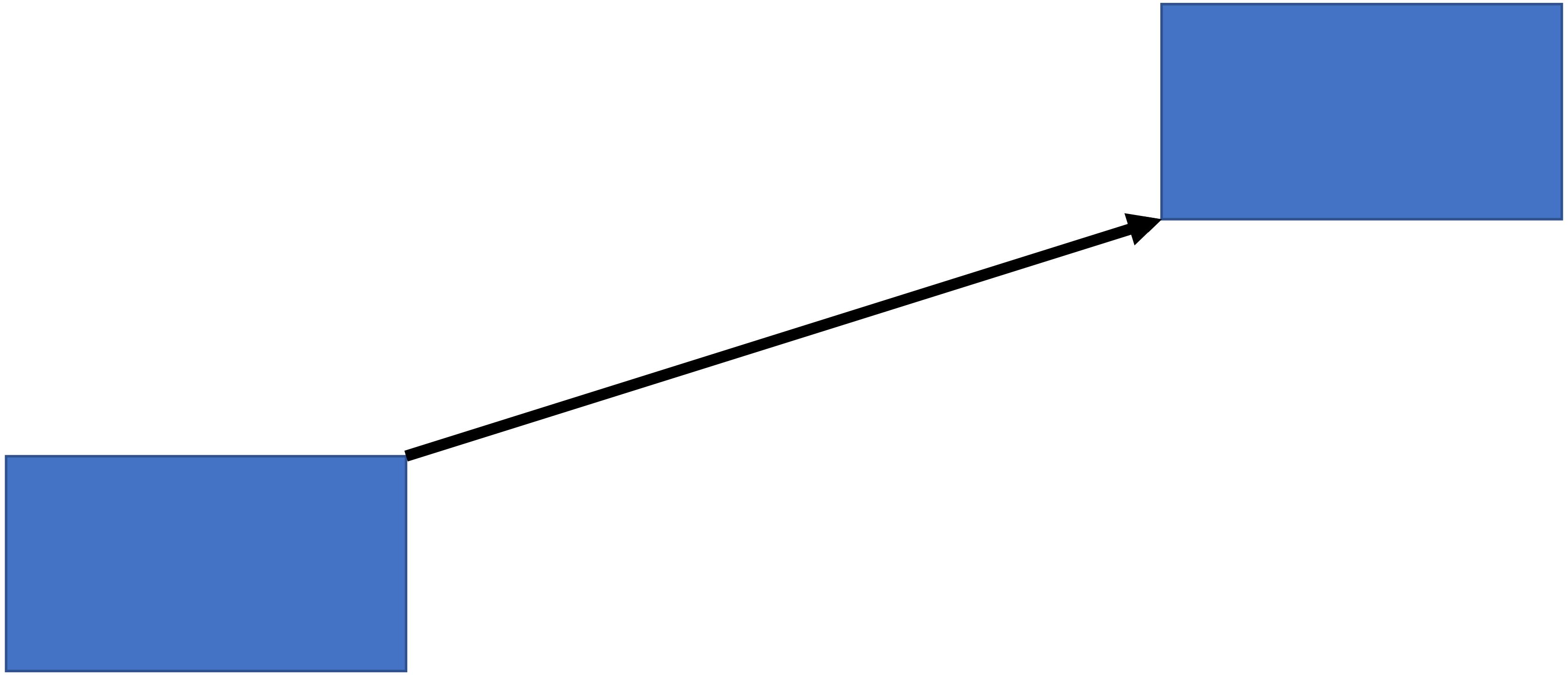
変な点を経由していても消せる

- 途中で経路が別の点にぶつかったときは、再帰的にこの処理を続ける。
- 始点と終点の距離が縮まっているのでこの再帰は停止する。



変な点を経由していても消せる

- 何も起こらずに線分に乗ったら変な点は消せる



1クエリ版 $O(V^2)$ の解法

- 鉛直な直線 x = inf を追加し、
  各点から左右に水平な線を伸ばしていく
- 辺上、x = inf 上、またはこの水平線上をたどる最短経路
- 水平線を伸ばすのは、
  各辺を試して一番近いものを取ればよいので $O(V)$ 時間
- これを V 個の点でやって全体 $O(V^2)$ 時間

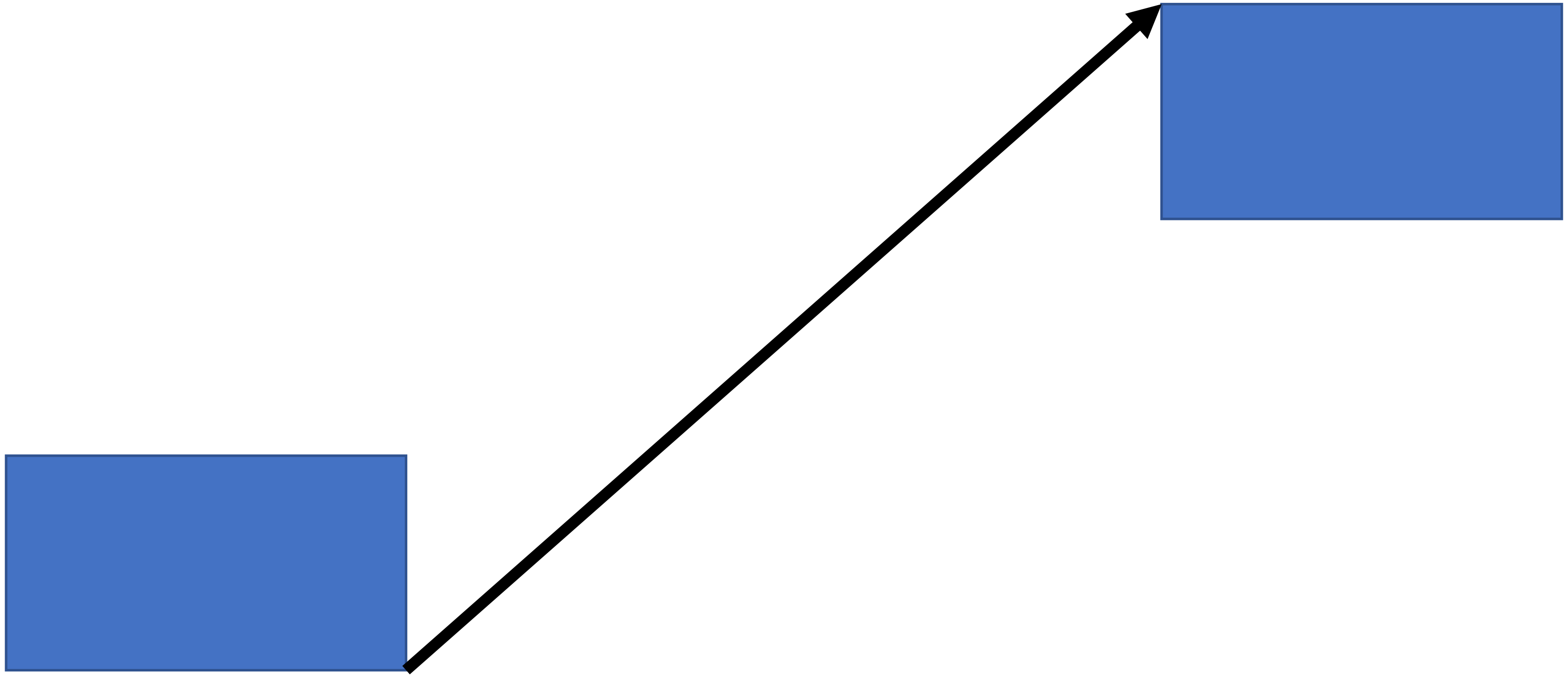
- **このようにして得た最短距離は $O(V^3)$ 解法より大きくならない**
- したがってこの値も最短距離

1クエリ版 $O(V^2)$ の解法

- $O(V^3)$ の解法よりも最短距離が大きくならないことの証明
- $O(V^3)$ 解法で張った辺と同コストで移動できることを示します

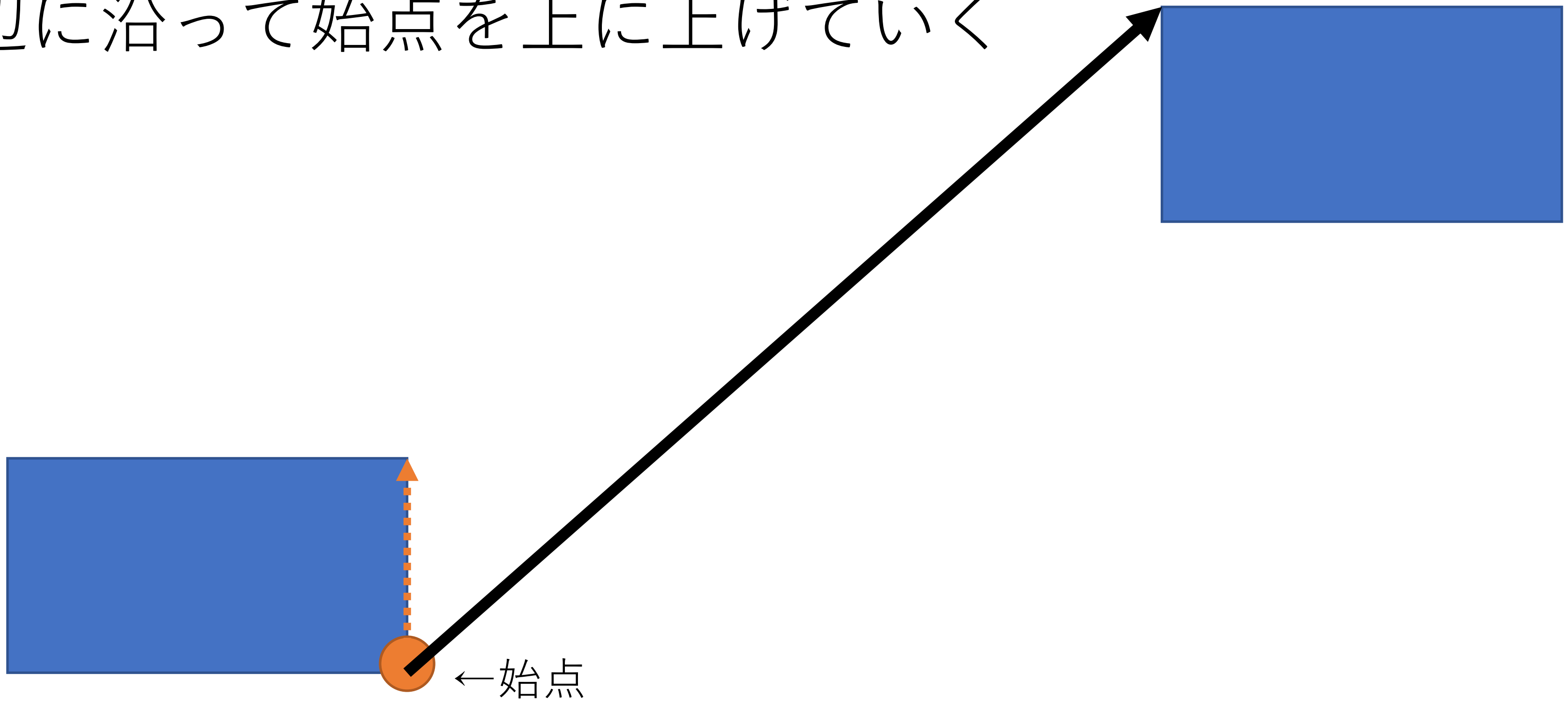
水平線だけでも損しない

- 可視な経路を考える



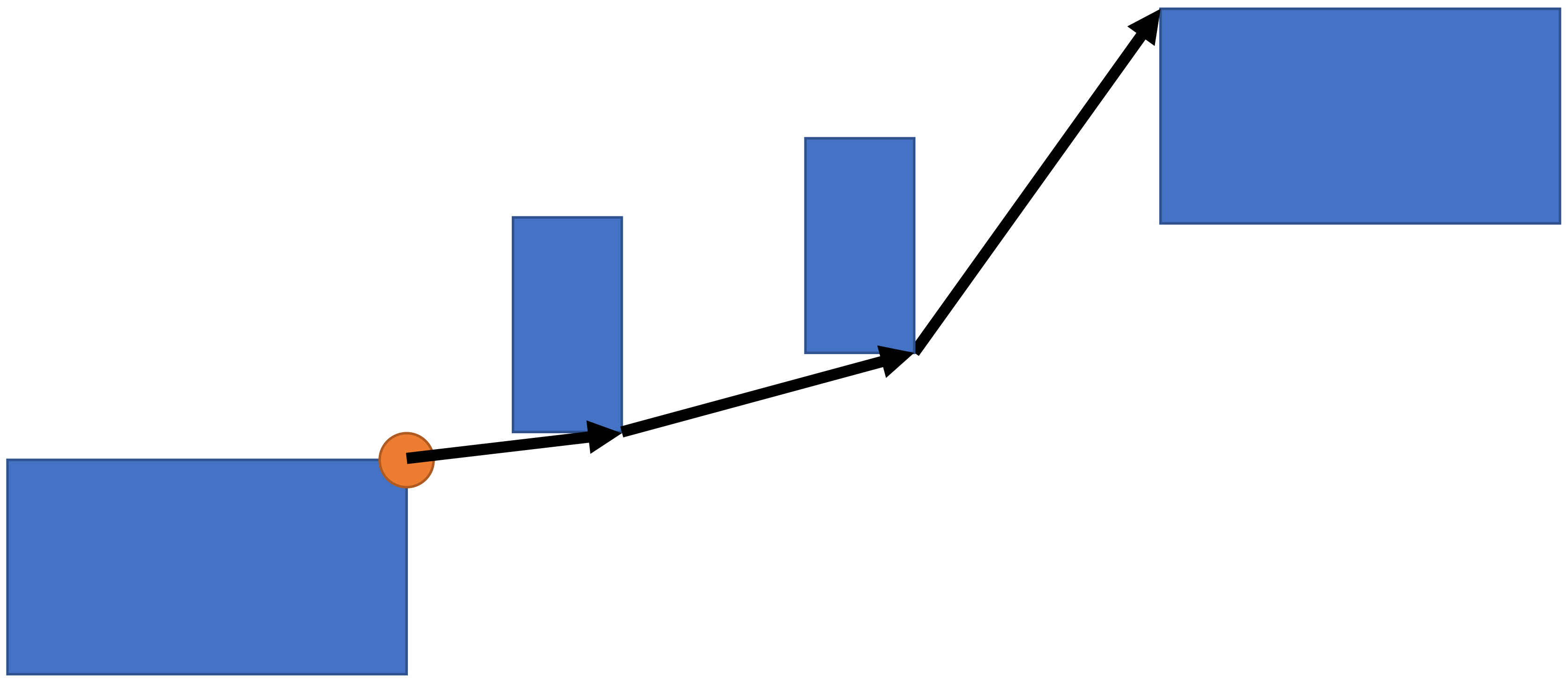
水平線だけでも損しない

- 経路に沿ってひもを張ったと思いながら、
  辺に沿って始点を上に上げていく



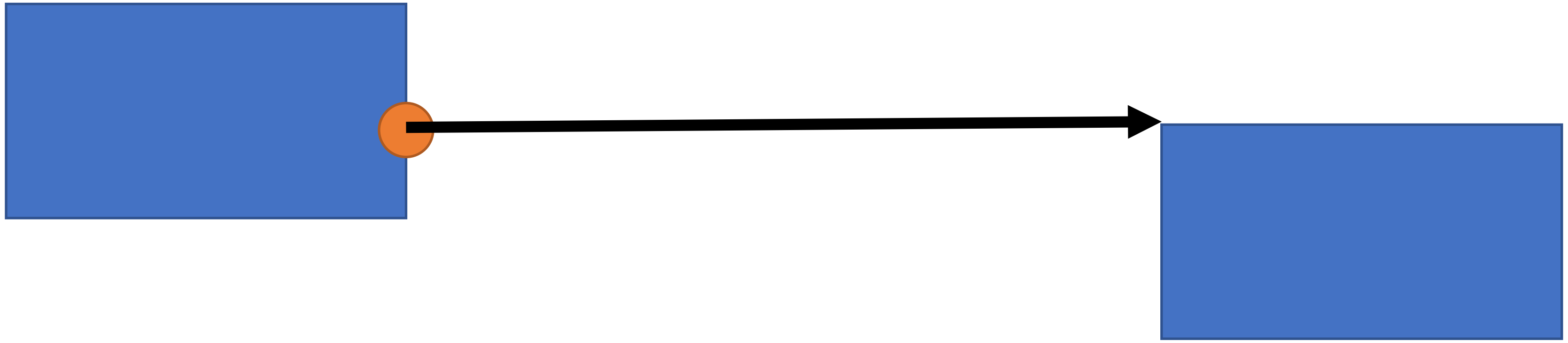
水平線だけでも損しない

- 途中で色々引っかかるが、それらは$O(V^3)$解法の辺なので再帰



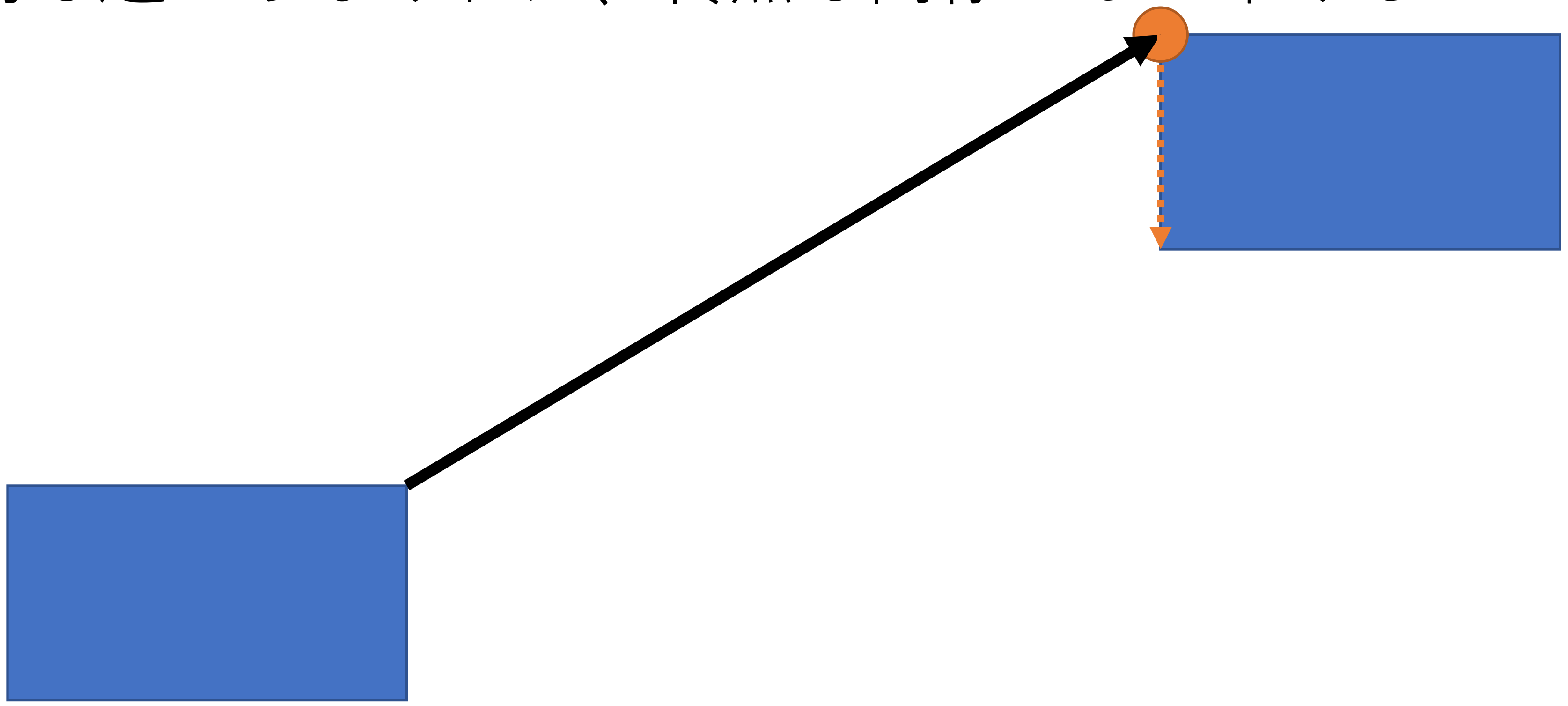
水平線だけでも損しない

- もし途中で水平になったらこれは $O(V^2)$ 解法の辺なので終了



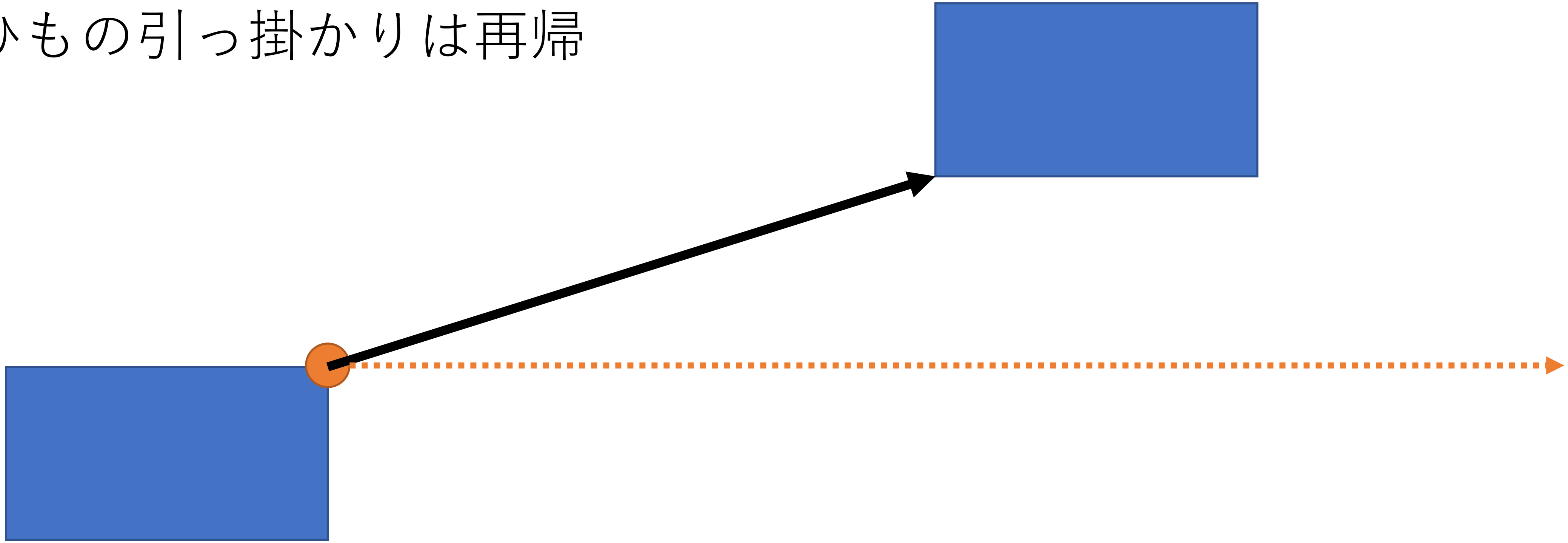
水平線だけでも損しない

- 何も起こらなければ、終点も同様にして下げる



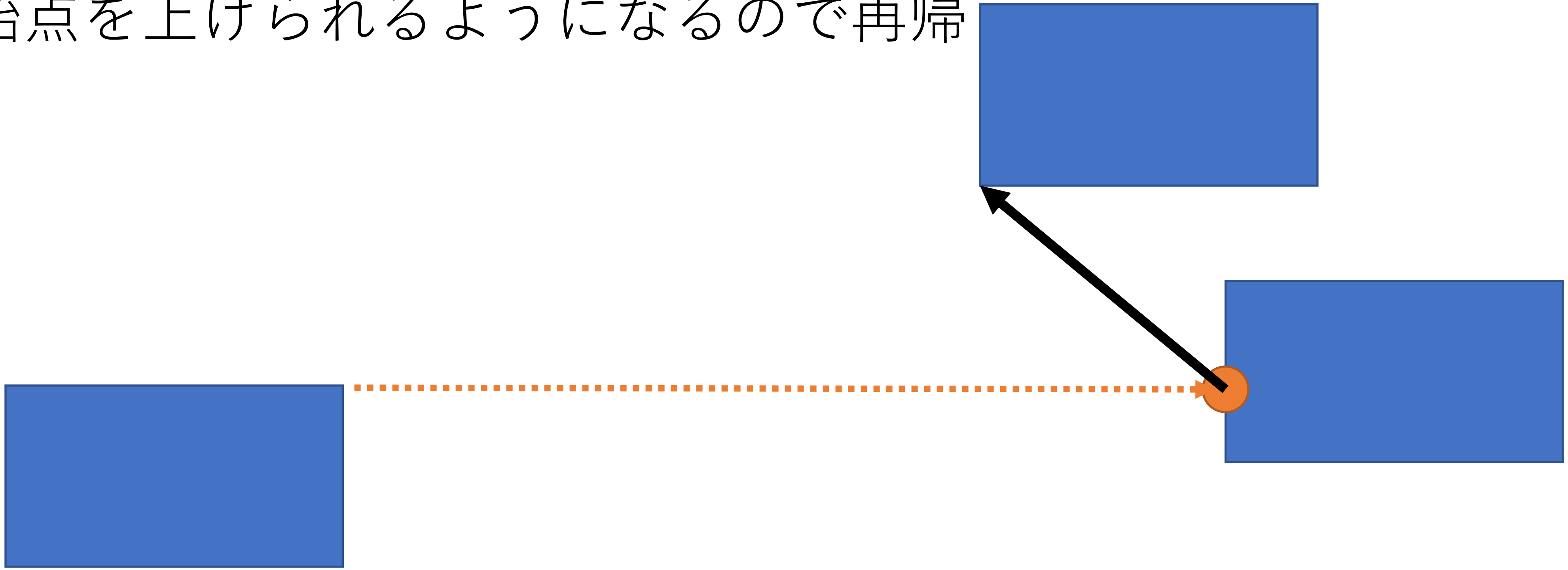
水平線だけでも損しない

- それでも何も起こらなければ、ひもを張りながら始点を右へ
- ひもの引っ掛かりは再帰



水平線だけでも損しない

- いずれ他の障害物か直線 x = inf にぶつかって、始点を上げられるようになるので再帰



水平線だけでも損しない

- 以上の手続きは、再帰するたびに高低差が真に減少し、減少幅だけコストが掛かっている
- そして、高低差が 0 になると停止する
- したがって、この手続きで経路を構成可能であり、このように構成した経路のコストは可視線分に等しい

クエリ

- $O(QV^2)$ にならなければ何でもいいです
  - クエリが来たら $O(V)$ でグラフに辺を追加して最短経路
  - クエリを先読みして予めすべてのクエリに対するグラフを構築
  - などなど……

ジャッジ解

- 幾何要素の表現に浮動小数点数を採用
  - amylase (C++): 257 lines
  - not (C++): 338 lines
  - climpet (C++, double): 220 lines
  - smiken (C++): 253 lines
- 幾何要素の表現に整数の組を用いた有理数を採用
  - climpet (C++, rational): 274 lines

統計情報

- Accepted / Trying
    - 1 team / 2 teams
- First Acceptance
    - ___KING___ (The University of Tokyo): 111:23

雑談

- y 座標が増加するときにだけコストがかかる設定について
  - 原案の時点では「Geometric Abyss」と呼ばれていて、
    高度を上昇するときに呪いを受ける大穴を冒険する予定でした
    - つくしあきひと『メイドインアビス』
  - 近い設定が先週の AtCoder で出て肝を冷やしました
    - AtCoder Beginner Contest 180 の E 問題
- 平面走査を要求して O(QV logV) で出すという話がありました
  - さすがにしんどい
  - 国内予選形式だと $O(V^2 + QV \log V)$ と区別できなそう