辺が先か，頂点が先か

原案：tokoharu
データセット：not
問題文：Darsein
解答：not, Darsein, hos

問題概要

有向グラフが与えられる。
A君が各辺に値 P(e)、B君が各頂点に値 Q(v) をつける。
ただし、ΣP(e)=1, ΣQ(v)=1 を満たす。
辺 e の始点を e^- 、終点を e^+ とする。

$$X = \Sigma_e (P(e)Q(e^+) - P(e)Q(e^-))$$

A君は X を最大化する。B君は X を最小化する。
A君が先に選ぶ時の X の最適値を求めよ。
（おまけ：B君が先に選ぶ時の X の最適値を求めよ。）

$|V| \leqq 10000, |E| \leqq 10000$

解法

A君の戦略に関わらず、B君が全ての頂点に同じ値を割り振れば X = 0。
したがって最適値は 0 以下。

サイクルが存在する場合、A君はサイクル上の辺に同じ値を割り当てる。
この時、B君がどのような戦略をとっても X = 0 となりこれが最適値。
（X を頂点についての和に書き直すと分かる）

解法

したがって、サイクルのない有向グラフ(=DAG)について考えれば良い。

辺の値が決められている時に、B君が X を x 以下にできるかを考える。
ある頂点 v_i について $\Sigma_{e_i\text{の終点が}v_i} P(e_i) - \Sigma_{e_i\text{の始点が}v_i} P(e_i) \leqq x$ であれば、
$Q(v_i) = 1, Q(v_j) = 0\ (i \neq j)$ とすれば良い。
そのような頂点が存在しなければ、最適値は x より大きくなる。

解法

P をフローだと思うと、A君の最適な戦略は「流入量-流出量」の最小値を最大化。
各頂点の「流入量-流出量」の比が与えられたときの、フローの経路を考える。
出次数が1以上の頂点について、流入量-流出量が流れていく経路を考えると、
出次数0の頂点へのいくつかの最長経路の和となる時に最適。
（流入量-流出量を保ったまま、P をなるべく大きくしたいので）
このような戦略は具体的には最長経路のみからなる森を考えると達成できる。

以上よりどのような比をとってもフローの経路は変わらない。
最適な比を考えると、Σ_v（最長距離）×（流入量-流出量）= -ΣP = -1 なので、
出次数が1以上の頂点の流入量-流出量を -1 / Σ_v（最長距離）となる。
したがって、最適値も -1 / Σ_v（最長距離）となる。

解法（おまけ：頂点の値を先に選ぶ）

B君が全ての頂点に同じ値を割り振ると、A君がどのように P を選んでも X = 0。
したがって最適値は 0 以下。

サイクルが存在する場合、A君はサイクル上の辺に同じ値を割り当て、
それ以外の辺を P(e) = 0 とすれば X = 0 となりこれが最適値。

解法（おまけ：頂点の値を先に選ぶ）

したがって、サイクルのない有向グラフ（=DAG）について考えれば良い。

頂点の値が決められている時に、A君が X を x 以上にできるかを考える。
ある辺 e_i について $Q(e_i^+)-Q(e_i^-) \geqq x$ であれば、$P(e_i) = 1$, $P(e_j) = 0$ $(i \neq j)$ とすれば良い。
$P(e_i^+)-P(e_i^-) \geqq x$ となる辺が存在しなければ、最適値は x より小さくなる。

よってB君の最善の戦略は $Q(e_i^+)-Q(e_i^-)$ の最大値を最小化すること。
最適値を X^{best} とおくと、DAGなのでDPにより最適な Q を求めることができる。
この時、Q(v) = -(出次数0の頂点からvまでの最長距離)× X^{best} である。
したがって、X^{best} は -1 / Σ_v（出次数0の頂点からvまでの最長距離）となる。

解法（LP）

この問題は線形計画問題として考えることができ、ラグランジュ双対をとると
前述の解法と同じ式が得られる。

https://www.slideshare.net/leingang/lesson-35-game-theory-and-linear-programming

結果

First AC: good_yamikin (1:21:30)

Accepted: 8 teams