

D: Surround the Castle

原案・データセット・解説: not

問題文: climpet

解答:

問題概要

あとで書く

$H \leq 20, W \leq 10,000, 1 \leq A_{ij} \leq 10^9$

解法

頂点の制約を辺の制約に変更

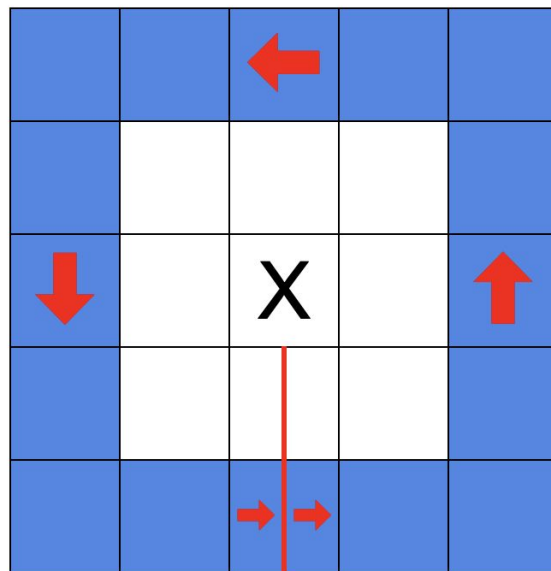
$$\text{cost}(\text{edge}_{ij}) = (\text{cost}(\text{vertex}_i) + \text{cost}(\text{vertex}_j)) / 2$$

平面グラフの最小サイクル → 切り開いて最短経路

適当にグラフを切り開く

切り開いたグラフ上で最短経路を求める

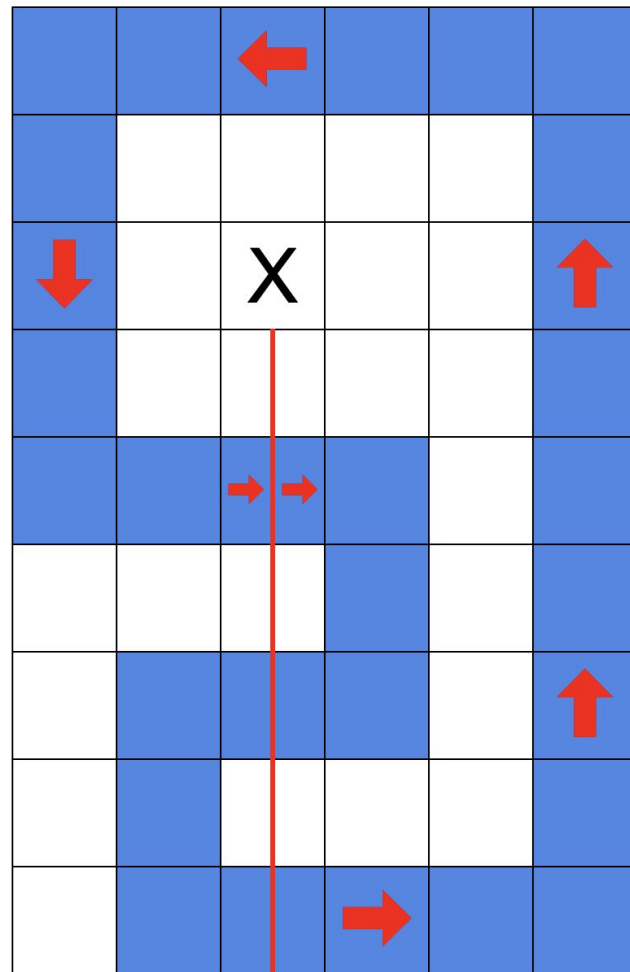
どう切り開く？



解法1

✗ 城から縦に切り開く

最小サイクルが右のようなケースで
最短路問題に帰着できない



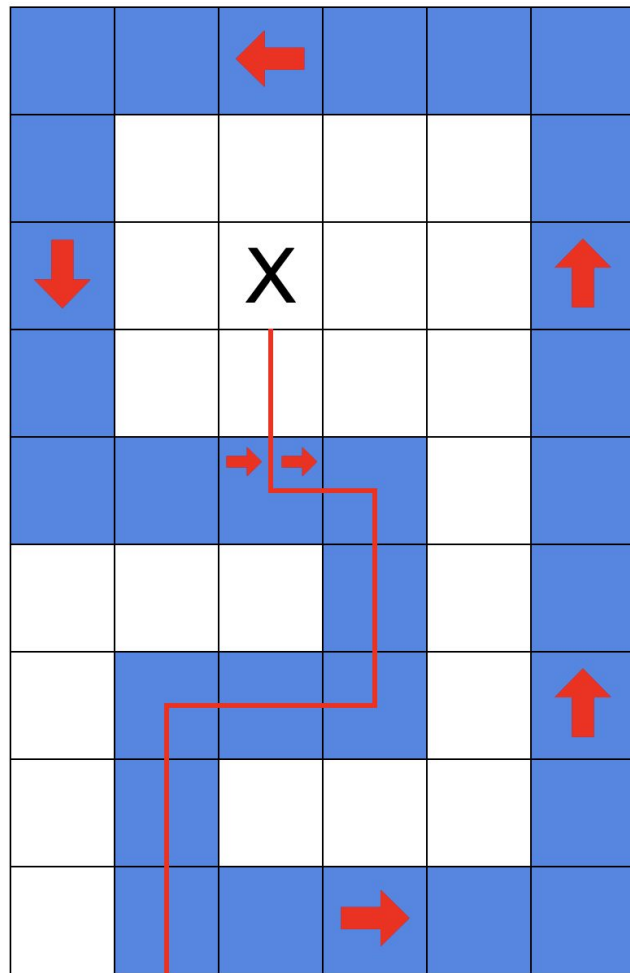
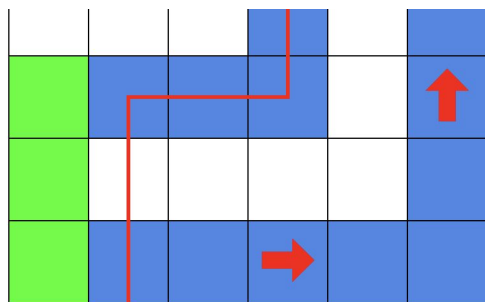
解法1

○ 城から外周への最短路に沿って切り開く

最小サイクルがこの最短路をまたぐのは一度だけ

何度もまたいでいるとすると、またいでいる点の最初と最後を繋いだほうが短い

下図のように遠回りになっている



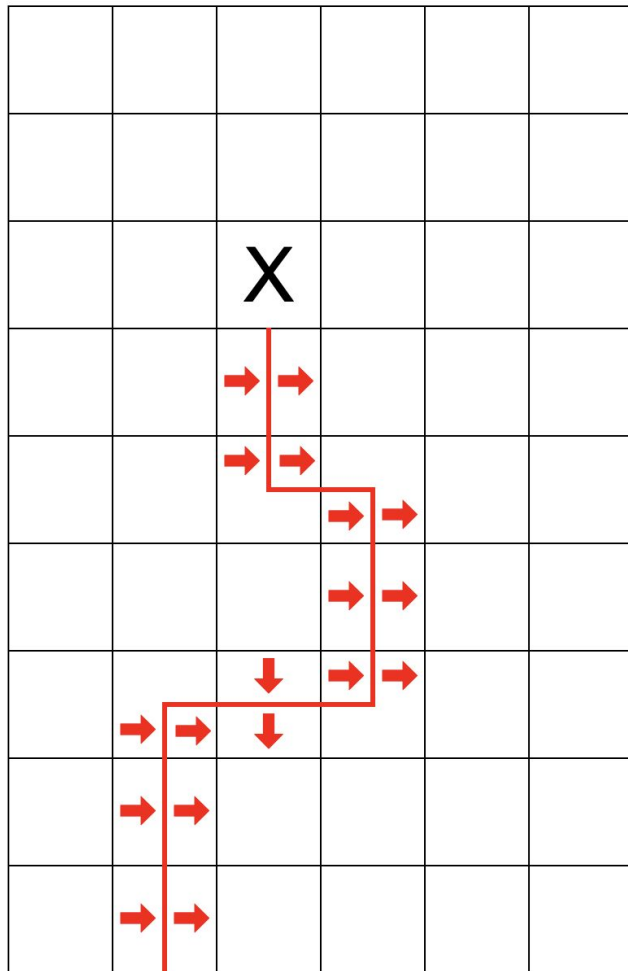
解法1

Xから外周への最短路の長さは $O(HW)$ なので、
この最短路上の点を始点終点とした最短経路問題を
 $O(HW)$ 回解けば良い

右図の各矢印ペアが始点終点

$H \leq 20, W \leq 10,000$ なので間に合わない

途中で必ず経由する点の集合を考える



解法1

最小サイクルは城から縦に伸ばしたパスを必ず通る

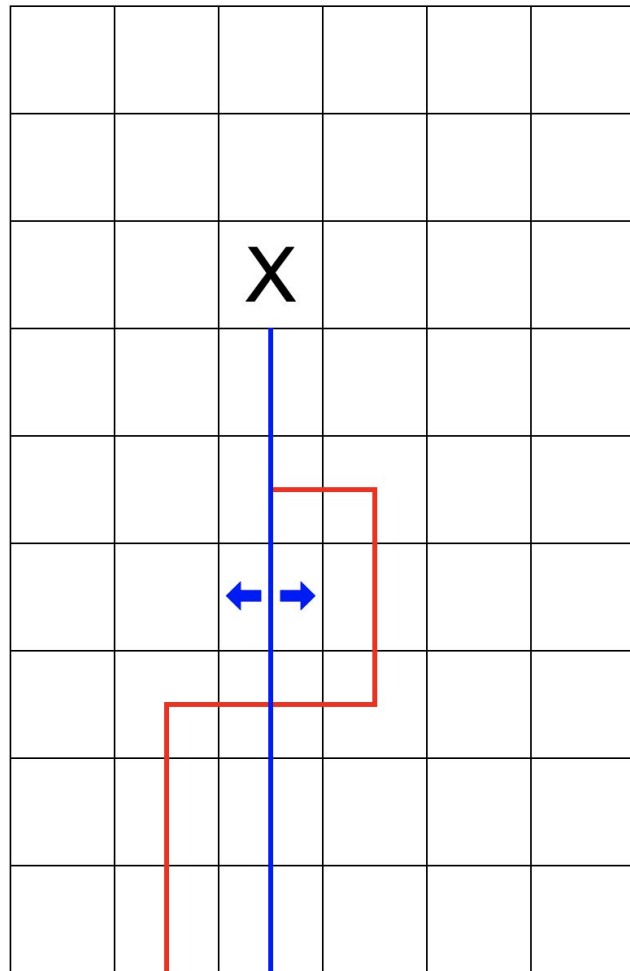
今回はグラフを切り開くわけではないので
何回も通ってもOK

切り開いたグラフ上で青のパスの各点を始点にして
赤線までの最短路を求める

青のパス上の点を全て試すので、赤のパス上の
各点を始点終点とした最短路が計算できている

全体の計算量は $O(H^2W \log HW)$

青のパス上の点の個数 $O(H)$
× 最短経路問題 $O(HW \log HW)$



解法2

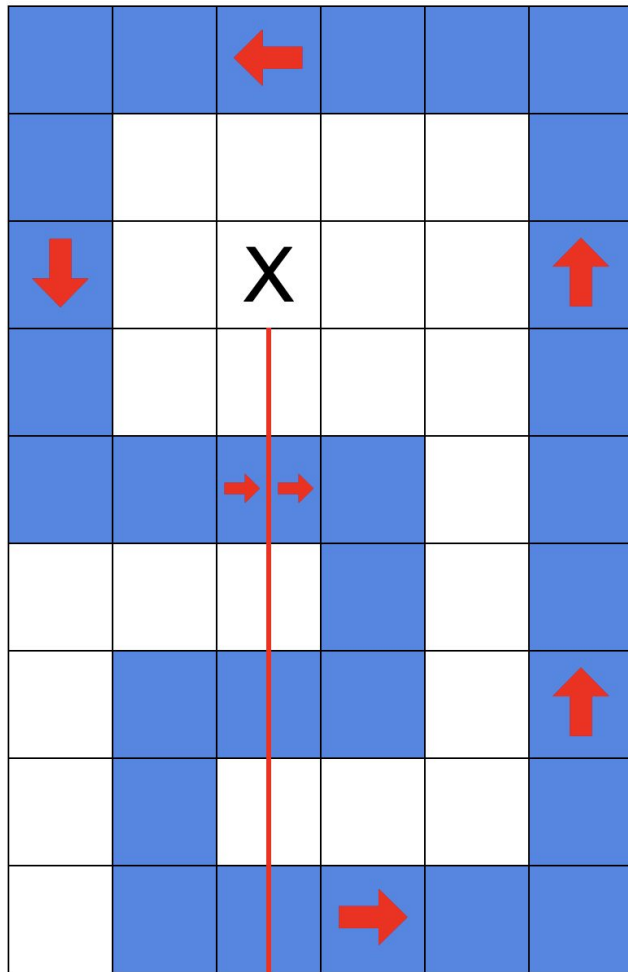
城から縦に切り開く

切り開く線を何度も跨ぐことがある

跨いだ回数を状態に持って最短経路問題を解く

城を囲む経路は必ず奇数回跨ぐ

状態が $O(WH^2)$ あるので、計算量は全体で
 $O(WH^2 \log WH)$



統計情報

あとで書く