

Feed Candies

原案・データセット：TumoiYorozu

問題文：climpet

解答：TumoiYorozu, climpet, hos

解説：TumoiYorozu

問題概要

- 1クエリにつき A, B, X, Y が入力される
- 以下の漸化式によって決定される (s_i, t_i) ($1 \leq i \leq 10^{100}$) ペアをうまく選択して、合計を (X, Y) にできるか判定しなさい
- $(s_1, t_1) = (1, 0)$
- $(s_{i+1}, t_{i+1}) = (As_i - Bt_i, Bs_i + At_i)$
- $|A|, |B| \leq 100, |X|, |Y| \leq 10^{16}, |A| + |B| \geq 2$, 最大200クエリ

サンプル

- $(A, B) = (2, -1), (X, Y) = (5, -12)$
- $\therefore (s_1, t_1) = (1, 0), (s_2, t_2) = (2, -1), (s_3, t_3) = (3, -4), (s_4, t_4) = (2, -11), \dots$
- 1, 2, 4 番目のペアを選択することで $(1, 0) + (2, -1) + (2, -11) = (5, -12)$ になる

問題概要 (要約)

$A + Bi$ 進数で $X + Yi$ を各桁 $0, 1$ のみ使用して表現できるか判定せよ
(i は虚数単位)

要約解説

- $(s_1, t_1) = (1, 0)$
- $(s_{j+1}, t_{j+1}) = (As_j - Bt_j, Bs_j + At_j)$

は

- $w_1 = 1$
- $w_{j+1} = (A + Bi) w_j$

と読み換えられる。(iは虚数単位)

- 整数ペアの演算規則が与えられ、実は複素数の掛け算規則であるというのはアジア地区大会で既出 (ICPC2012 東京大会 Problem A)
- 問題文のサンプルをプロットすると螺旋状になり、気づきやすいかも

実装方針

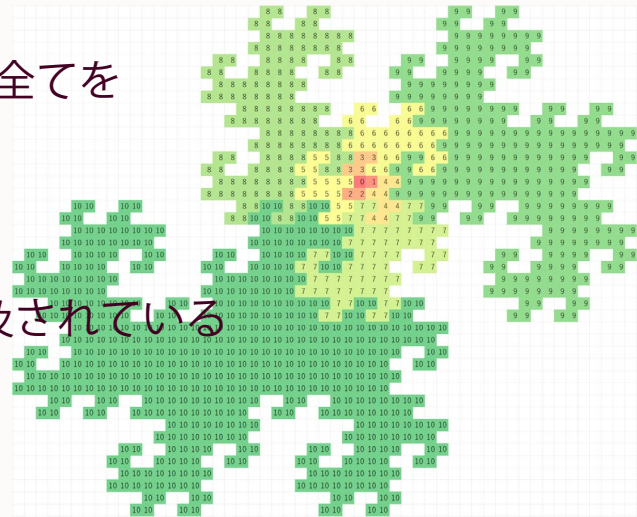
- 基数変換をする際の一般的なテク（下の位から決定していく）
- $X + Yi$ か $X + Yi - 1$ のうちどちらか1個(または0個)は $A^2 + B^2$ で割り切れる
- 割り切れない時は構築不可(-1)
- $X + Yi - 1$ が割り切れる時は、その位に1が立つ
- 割り切れたら

$$\text{tie}(X, Y) = \{(AX + BY)/(A^2 + B^2), (AY - BX)/(A^2 + B^2)\};$$

- 永遠に割り切れてしまうことがあるので、**ループ検出か上限を設ける**
e.g.) 2進数で負の数はマイナス符号を用いずに表現することは不可能
- 構築できるなら答えは1通りしか無い（分岐が発生しないので）

余談

- -2進数変換は AtCoder で既出 (ABC105C)
- $2i$ 進数変換も面白いので問題ストックに入れた (ICPC/JAG は検索不可なので)
- 模擬地区セットが組まれて3番目に簡単枠で入れられたけど、 $2i$ 進じゃ簡単そうな気がしたので $i-1$ 進数に変更した
- どうやら地区大会が検索OKになったので $A+Bi$ 進変換にした (難易度インフレ)
- -2進数はマイナス符号を用いずに負の数表現できるが、 $2i$ 進数は各位0-3を用いることで虚部が偶数なガウス整数全てを符号を用いずに表現可能
- $i-1$ 進数の場合は各位0-1で全てのガウス整数を表現可能 (ドナルド・クヌース考案)
- これらの変則基数は書籍「ハッカーのたのしみ」でも言及されている
- $i-1$ 進数で表現するのに何桁必要かをプロットすると、右図のような模様が作れる (ツイン・ドラゴン)



ジャッジ解

- TumoiYorozu(C++) : 84行, 1858 bytes
- Climpet (C++) : 50行, 1066 bytes
- Hos (C++) : 89行, 2075 bytes

統計情報

- AC / Trying Teams
 - 6/8
- First Acceptance
 - ___ KING ___ (92 minutes)