

ICPC2021 模擬地区予選 C 問題

Permutation Magic

原案: climpet

問題文: tsutaj

データセット: climpet

解答: beet, climpet, hos, tsutaj

解説: tsutaj

2022 年 3 月 6 日

Permutation Magic

- ▶ 長さともに N である数列 $A = \{a_i\}$ と $B = \{b_i\}$ が与えられる
 - ▶ 要素の値は全て 1 以上 M 以下
- ▶ 数列 A は、長さ M の順列 $P = \{p_i\}$ を以下のように用いて $A' = \{a'_i\}$ にできる
 - ▶ $a'_i = p_{a_i}$
 - ▶ P は長さ M の任意の順列 (好きに決めてよい)
- ▶ A' としてあり得る数列であって、以下を満たす数列を出力せよ
 - ▶ B とのハミング距離が最も短い
 - ▶ 上記の条件を満たすものの中で辞書順で最も小さい

ハミング距離の最小化のみを行う場合

- ▶ $A_i = x$ だったものを $A'_i = y$ にするとき、ハミング距離にどう影響するか？
 - ▶ $B_i \neq y$ のとき、ハミング距離が 1 かかる
 - ▶ $B_i = y$ のとき、要素が一致しているのでハミング距離に影響しない
- ▶ また、 A から A' に変えるとき、順列 P を使っている
 - ▶ 順列は要素が相異なるので、 $(a_u = a_v) \iff (a'_u = a'_v)$
- ▶ 以上より、 A に順列を作用させたときのハミング距離への影響は以下のようにまとめられる

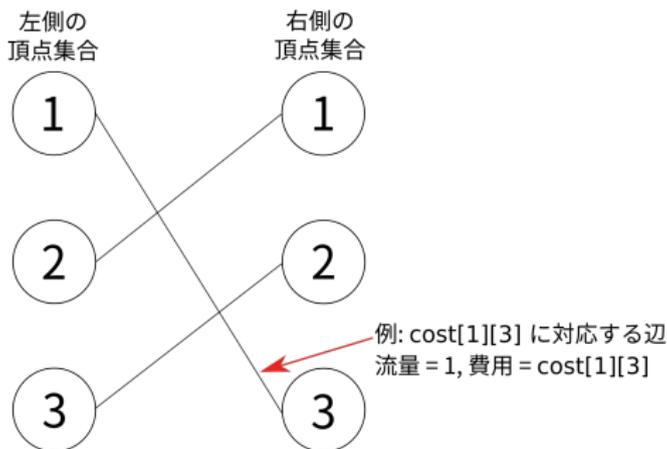
ハミング距離への影響

A で x であるものを A' で y に変化させたとき、ハミング距離への影響は以下のように求められる

$$\text{cost}[x][y] := \underbrace{|\{i \mid A_i = x \wedge B_i \neq y\}|}_{B \text{ と一致していないもの}} \quad (1)$$

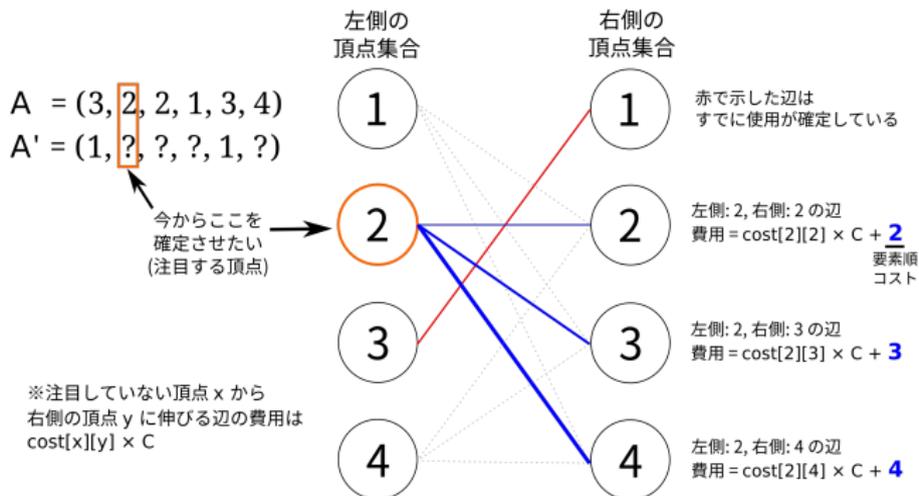
ハミング距離の最小化のみを行う場合

- ▶ ある 1 種類の値についての距離への影響は前ページで求められたが、結局ハミング距離を最小化するにはどうすればよいか？
- ▶ “順列を作用させる” というのを、グラフのようにとらえてみよう
 - ▶ $\text{cost}[x][y]$ は、下図における左側の頂点集合の x 番目と、右側の頂点集合の y 番目を結ぶ辺のコスト
 - ▶ 順列を考えているので、各頂点の次数はちょうど 1 であるべき
- ▶ これは **二部グラフの最小費用流** である！
- ▶ このグラフを作ってフローを流せばハミング距離の最小化ができる



辞書順最小化も行う場合

- ▶ A' で出現が早いものほど値を貪欲に小さくしていきたい
- ▶ 以下のように高々 M 回フローを流して、1 種類ずつ決定すれば良い
 - ▶ はじめは順列 P の要素が全て未確定
 - ▶ A の要素を前から順に見ていく
 - ▶ p_{a_i} の値が確定していないなら、下図のようにフローを流して p_{a_i} を確定



- ▶ C は十分大きな定数
- ▶ 注目する要素を、できるだけ小さい要素に割り当てるようになるための“要素順コスト”に注意

- ▶ 前ページでは 1 種類ずつ決定していたが、複数種類をまとめて決定することもできる
 - ▶ K 種類をまとめて決定するとき、前ページの“要素順コスト”を M 進数で入れていく
 - ▶ 1 種類についての要素順コストを 0 から $M - 1$ までで表現するとき、 K 種類の場合は 0 から $M^K - 1$ までで表現可能
 - ▶ A での出現順が先のものほど優先度が高いので、大きい位に割り当てる
 - ▶ これを行うことで $K = \log_M X$ 種類ずつ決定することができる
 - ▶ X は要素順コストの最大値
 - ▶ $\text{cost}[x][y]$ に掛けるための十分大きい定数 C もこれに応じて大きくする
 - ▶ やりすぎるとオーバーフローするので注意

▶ Writer 解

- ▶ beet (C++・276 行・6289 bytes)
- ▶ climpet (C++・99 行・1874 bytes)
- ▶ hos (C++・199 行・6066 bytes)
- ▶ tsutaj (C++・230 行・7830 bytes)

▶ 統計

- ▶ AC / tried: 24 / 54 (44.4 %)
- ▶ First AC
 - ▶ Saitama University: seica is gone (24 min 34 sec)