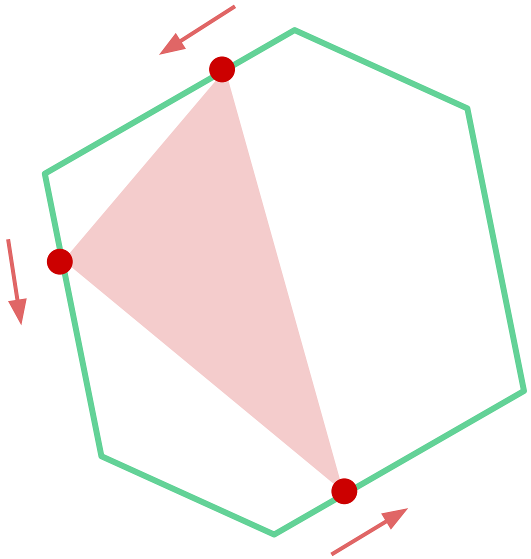
JAG ICPC模擬国内予選2022
D: 動く点 P と愉快な仲間たち Q, R

原案：darsein
問題文：climpet
データセット：not
解答：beet, climpet, hasi, HIR, hos, not, riantkb, tomerun
解説：riantkb

問題概要

- 凸 N 角形の上を 3 点 P, Q, R が同じ速度で回る
- △PQR の面積の最小値を求めよ

- 3 <= N <= 1,000
- (座標の絶対値) <= 10,000



三角形の面積の求め方

- 三角形の 3 つの頂点を反時計回りに

$$P(x_p, y_p), Q(x_q, y_q), R(x_r, y_r)$$

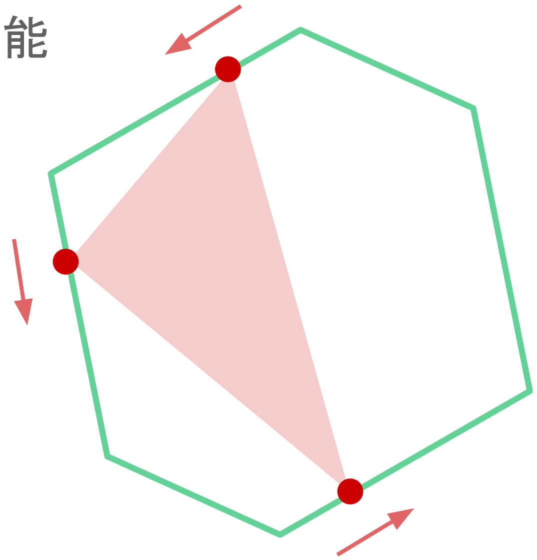
と置くと、この三角形の面積は

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \frac{1}{2}((x_q - x_p)(y_r - y_p) - (x_r - x_p)(y_q - y_p))$$

となる

考察

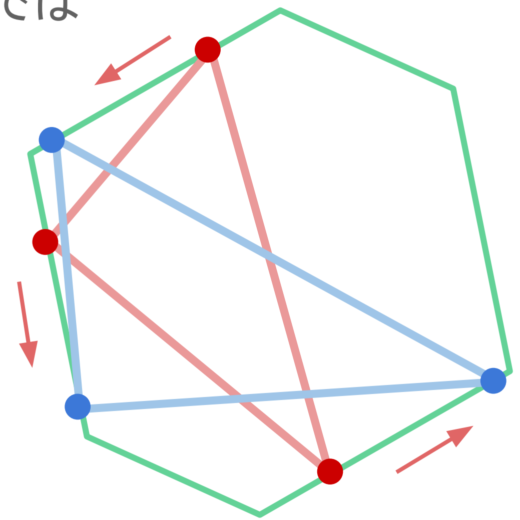
- 3 点の座標が分かれば、三角形の面積は求まる
- しかし、点が一周回る間の全てのタイミングにおける
  面積を求めてそれらの最小値を求める、というのは不可能
    - 法則を見つけることで調べる位置の個数を抑えたい



考察

- ある点が N 角形の頂点を通り過ぎてしまうと移動する向きが
変わってしまうが、それまでは常に一定の向きに一定の速度で動いている

- つまり、どの 3 点も N 角形の頂点を跨がないような区間では
3 点とも一定の向きに動いており、
三角形の面積の増減も何らかの法則に従いそう
    - 実際、三角形の面積は高々二次式となる
    - 今回 N 角形が凸であることが保証されているので、
符号付き面積が負になることもない



考察

- いま見ている区間での３点 P, Q, R を初期位置を　P_0, Q_0, R_0
  それぞれの移動方向を表す単位ベクトルを　$\boldsymbol{v_p, v_q, v_r}$
  として △PQR の時刻 t での面積を計算すると以下のようになり、
  具体的な値および軸の位置がわかる
  - 同時に、この関数が常に下に凸（または直線）になることもわかる

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right| \\
&=\frac{1}{2}\left|\left(-t\overrightarrow{v_p}+\overrightarrow{P_0Q_0}+t\overrightarrow{v_q}\right)\times\left(-t\overrightarrow{v_p}+\overrightarrow{P_0R_0}+t\overrightarrow{v_r}\right)\right| \\
&=\frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{P_0Q_0}+t(\overrightarrow{v_q}-\overrightarrow{v_p})\right)\times\left(\overrightarrow{P_0R_0}+t(\overrightarrow{v_r}-\overrightarrow{v_p})\right)\right| \\
&=\frac{1}{2}\left(t^2\left|(\overrightarrow{v_q}-\overrightarrow{v_p})\times(\overrightarrow{v_r}-\overrightarrow{v_p})\right|+t\left(\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\times(\overrightarrow{v_r}-\overrightarrow{v_p})\right|+\left|(\overrightarrow{v_q}-\overrightarrow{v_p})\times\overrightarrow{P_0R_0}\right|\right)+\left|\overrightarrow{P_0Q_0}\times\overrightarrow{P_0R_0}\right|\right)
\end{aligned}
$$

考察

- なお、N 角形の頂点を跨がない区間では高々二次式になるということさえ分かれば、その区間内で三分探索を行ってもよい

- あとは N 角形の頂点を跨がない区間が得られればよいが、これは P, Q, R それぞれが N 角形の各頂点に重なる時刻を求めてソートしたり、実際に P, Q, R のいずれかが N 角形のいずれかの頂点にぶつかるまで進む、などのように実際に P, Q, R を動かしながら求めてもよい

解法

- 以上より、一周を P, Q, R が N 角形の頂点を跨がない区間で分割し、
それぞれの区間内での最小値を二次式の計算または三分探索で
求めることで、全体の最小値も求めることができる

- 計算量は O(N) や O(N log N) などになる
  - 最小値の計算に三分探索を使った場合は、ここにさらに log(max(|X|, |Y|) / eps) などがつく

ジャッジ解

- beet (C++): 120 lines, 2.7 kB
- climpet (C++): 110 lines, 2.1 kB
- hasi (C++): 84 lines, 2.1 kB
- HIR (C++): 233 lines, 5.4 kB
- hos (C++): 169 lines, 5.6 kB
- not (C++): 112 lines, 2.8 kB
- riantkb (C++): 96 lines, 2.8 kB
- tomerun (C++): 102 lines, 3.3 kB

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 38 / 47
- First Acceptance
  - Heno World (21:07)