JAG ICPC模擬国内予選2022
E: 最大公約数

原案：hos
問題文：climpet
データセット：riantkb
解答：beet, HIR, hos, riantkb
解説：riantkb

問題概要

- 整数 M, A が与えられる。以下の制約を全て満たす整数 x の個数を求めよ
  - 1 <= x < M
  - M と x は互いに素
  - g = gcd(M, A) とするとき、Ax ≡ g (mod M)

- 1 <= A < M <= 10^{12}
- 入力は最大 500 ケース与えられる

考察

- まず、M と x が互いに素という条件がない場合を考える

- A * X ≡ g (mod M) を満たす X は、拡張ユークリッドの互除法などで
  見つけることができる（このとき、gcd(X, M/g) == 1 となる）

- このとき、任意の整数 y に対し A * (X + (M/g) * y) ≡ g (mod M) が満たされ、
  かつこの形以外に A * X’ ≡ g (mod M) を満たす X’ は存在しないため、
  (X + (M/g) * y) と M が互いに素になる y (0 <= y < g) の個数が求まれば良い

考察

- gcd(X, M/g) == 1 より、gcd(X + (M/g) * y, M/g) == 1 となる
- よって、M の素因数の中でも M/g の素因数に含まれないもののみについて互いに素かどうかを気にすれば良い
  - M から M/g の素因数を除いたものを M' と置く。これは素因数分解をするか、「M/g との gcd で割る」を繰り返す、という方法でも求めることができる

- X + (M/g) * y ≡ t (mod M') としたとき、gcd(M', M/g) == 1 であるため、t は任意の整数を取れる
- M' と互いに素かどうかのみを気にすれば良いので、条件を満たす 0 <= t < M' の個数は phi(M') である
  - phi(x) はオイラーのトーシェント関数であり、x 以下の x と互いに素である正整数の個数を表す

考察

- 実際には X + (M/g) * y ≡ k * M’ + t (mod g) (0 <= k < g/M’) という条件を満たせば良いので、求めるものは phi(M’) * (g / M’) となる

解法

- 以上より、M と A の最大公約数 g および解説中に示した M' を求めた上で、phi(M') * (g / M') を求めれば良いとわかる
- 計算量は phi(M') を求める部分が律速で O(√M) となる
  - pollard's rho algorithm を使うことで O(M^{1/4}) にすることもできる

- 上記の方法以外にも、M を素因数分解した素冪ごとに数え上げることでも解くことができます
  - コンテスト的には、愚直解と照らし合わせながらこちらで合わせる方がやりやすいかもしれません

おまけ

- 原案の段階では以下のような問題だったのですが、
  ある理由で今回の問題に変更になりました。
  この問題についてもぜひ考えてみてください。
  （これの想定解は何か、そしてなぜ変更になったかなど）

  - 今回の問題と同じ条件を満たす x を**どれかひとつ求めよ**
  - 1 <= A < M <= **10^{18}**
  - テストケース数 <= **10^5**

ジャッジ解

- beet (C++): 128 lines, 2.4 kB
- HIR (C++): 519 lines, 12.6 kB
- hos (C++): 78 lines, 2.1 kB
- riantkb (C++): 39 lines, 727 B

統計情報

- AC teams / Trying teams
  - 36 / 41
- First Acceptance
  - MSB (34:50)