ICPC模擬国内予選2022
F: N 階ダンジョンと K 人の勇者たち

原案: tokoharu
問題文: riantkb
データセット: climpet
解答: beet, climpet, hos
解説: climpet

問題概要

- N 頂点 M 辺の DAG が与えられる。
- 頂点 1 から N へ K 回移動する。
- 各辺を通るたびにコストがかかる。
- 辺 i のコストは、その辺を通るたびに増加する。具体的には初項 c_i、公差 d_i の等差数列になる。
- コストの合計の最小値を求めよ。

制約

- $N, M \le 500$
- $K \le 5000$

要するに

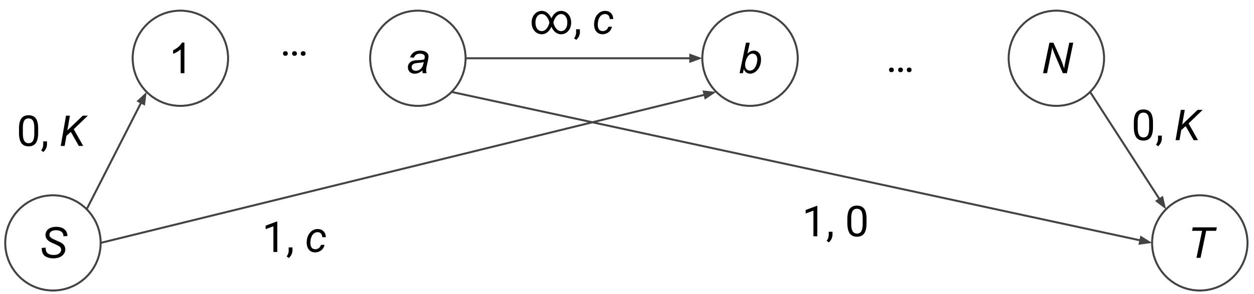
- この問題は、次のような最小費用流問題とみなせる。
  - 各 i について、頂点 a_i から b_i へ容量∞の辺を張る。
  - 各辺の最小流量制約として、流量は1 以上でなければならない。
  - 辺のコストは、その辺の現在の流量に応じて増加する。
  - 頂点 1 から N まで流量を K だけ流すときの、コストの最小値を求めよ。
- 非自明なのは以下の二点であり、それぞれ考察する。
  - 最小流量制約
  - 辺のコストが可変であること

最小流量制約

- まずは最小流量制約について考える。
- 単純化して、以下の問題を考えてみることにする。
    - グラフ中のある一本の辺について、始点a、終点 b、容量∞、コスト c (固定)、最小流量制約が 1 である。
    - 頂点 1 から N まで流量を K だけ流すときの、コストの最小値を求めよ。
- 超頂点 S, T を導入し、S から T への (普通の) 最小費用流問題に帰着させる。
- 最初に、辺 $a \to b$ に流量 1 だけ流したと仮定する。
    - つまり、a から流量 1 だけ流出し、b には流量 1 だけ流入することになる。
- また、頂点 1 からは流量 K だけ流出し、頂点 N には流量 K だけ流入しなければならない。

最小流量制約

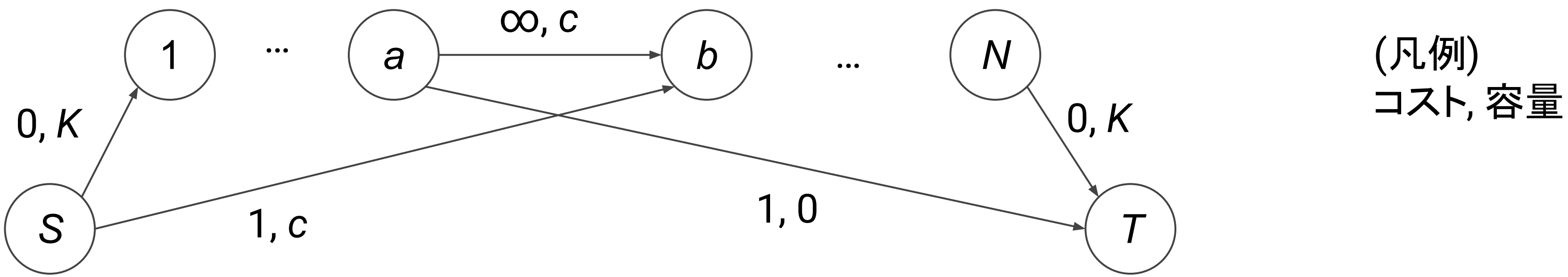
- 各頂点について流量保存条件を考えると、次のようにすればよいことがわかる。
  - S から 1 にコスト 0、容量 K の辺を張る。N から T にコスト 0、容量 K の辺を張る。
  - S から b にコスト c、容量 1 の辺を張る。a から T にコスト 0、容量 1 の辺を張る。
- S から T に流量 $K+1$ 流したときのコストが答え。
  - ただし流量 $K+1$ 未満しか流れない場合は、最小流量制約を満たす解なし。



(凡例)
コスト, 容量

最小流量制約

- M 本の辺全部が最小流量制約 1 を持つ場合も同様に:
  - S から 1 にコスト 0、容量 K の辺を張る。N から T にコスト 0、容量 K の辺を張る。
  - 各辺 i について、S から b_i にコスト c_i 、容量 1 の辺を張る。a_i から T にコスト 0、容量 1 の辺を張る。
  - S から T に流量 $K+M$ 流したときのコストが答え。ただし流量$K+M$ 未満しか流れない場合は、最小流量制約を満たす解なし。



ここまでのまとめ

- 以上より、各辺の最小流量制約については、通常の最小費用流に帰着できることがわかった。
  - これ以降の説明では、最小流量制約については割愛し、無いものとして扱う。
- あとは、辺のコストが流量に対して可変であることをどうにかできればよい。

方針1: 辺を K 本ずつ張る

- 辺 i を通るときのコストは以下の通り。
  - 1 回目: c_i
  - 2 回目: $c_i + d_i$
  - 3 回目: $c_i + 2d_i$
  - …
  - K 回目: $c_i + (K - 1)d_i$
- 一般に、グラフに多重辺がある場合、最小費用流アルゴリズムの挙動として、コストの小さい辺から順に使われることになる。
- そこで、頂点 a_i から b_i に、コストの異なる容量 1 の多重辺を計 K 本独立に張る。これらの辺は “コスト c_i の辺” → “コスト $c_i + d_i$ の辺” → “コスト $c_i + 2d_i$ の辺” → … の順に使われることになる。

方針1: 多重辺を K 本ずつ張る

- よって、各辺を K 倍した多重辺を張ることで、正しい答えが得られる。
- …が、計算量は $O((K+M)KM \log (KM))$ などとなり、とても遅い。
  - 一応、数十分くらい待てば通るようなので、国内予選の形式ではなんとかならないこともないです。
  - 原案の時点では、この方針で通る程度の制約でした。

方針2: 多重辺を陽に張らない

- よく考えると、多重辺を K 本張ったとしても、その中で「残り容量が正の辺のうち、コストが最小のもの」しか使われない。
- なので、辺を愚直に K 倍する必要はない。代わりに、その辺を次に使うときのコストを動的に求めるよう、最小費用流アルゴリズムを実装する。
  - なお、流し戻しを考えると、逆辺についても同じことをする必要がある。
  - また、流量は 1 ずつ流すことになる。
- 計算量は $O(KM \log M)$ などとなり、十分高速である。
- なお、多くの最小費用流ライブラリ (AtCoder Library など) はこのような状況に対応していないと思われるため、ライブラリの中身を編集する必要が出てくる。

ジャッジ解

- beet (C++): 221行, 4735 bytes
- climpet (C++): 148行, 3028 bytes
- hos (C++): 197行, 5065 bytes

統計情報

- AC / trying teams
  - 6 / 11
- First acceptance
  - The Raspberry Candies (101:30)
  - 辺をたくさん張って待つ方針のようです