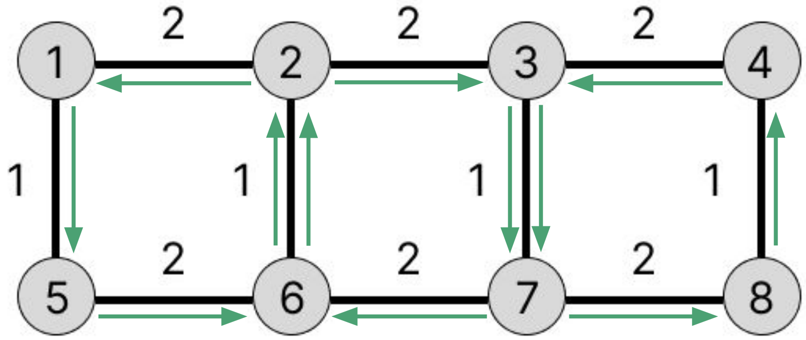
C: Track Train Trail

原案：prime
問題文：darsein
データセット：riantkb
解答：darsein, ei1333, hos

問題概要

- 無向グリッドグラフ上で全ての辺を必ず1度以上通るような、コスト最小の閉ウォークを求めよ
- 制約: $2 \leq H, W \leq 100$

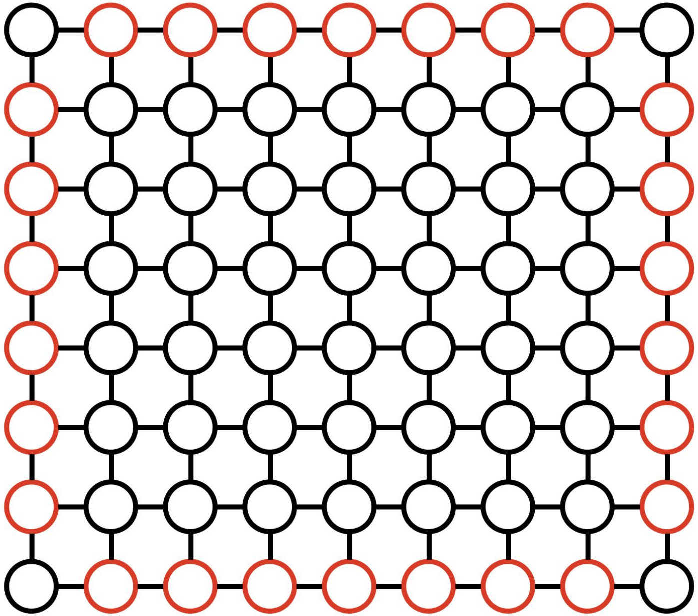


考察

- 「中国人郵便配達問題」のグリッドグラフ版である
- 一般のグラフの場合、$O(V^3)$ で解けることが知られている ($V :=$ 頂点数)
  - 元ある辺と同じコストの多重辺を追加する操作のみで、元のグラフをオイラーグラフにすることを考える
  - オイラーグラフである必要十分条件は「全ての頂点の次数が偶数」
  - 奇数の頂点はちょうど偶数個ある(握手補題) ので、どの奇数頂点同士をマッチングするかの問題に帰着できる
  - 全頂点対間最短路 + 最小一般マッチングで $O(V^3)$
- $O(V^3) = O(H^3W^3)$ なので、今回の制約では遅すぎる

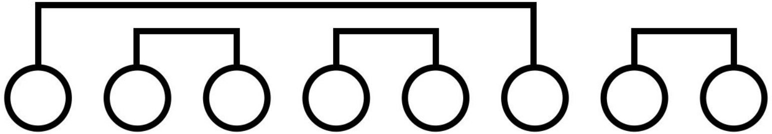
解法

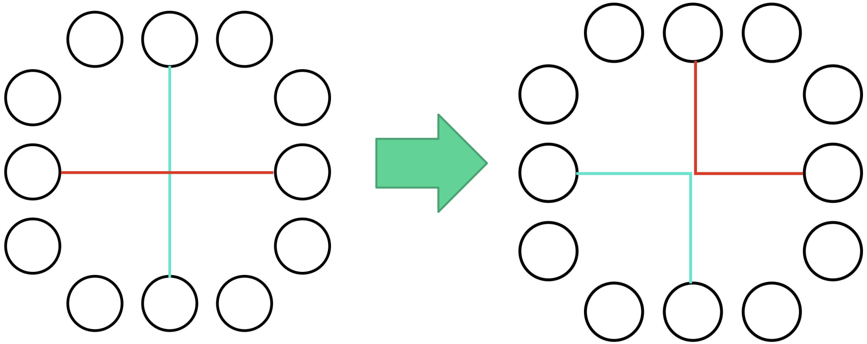
- グリッドグラフの奇数頂点は端にしかなく、2(H-2) + 2(W-2) 個だけ
  - O(H+W) 個の頂点だけでマッチングを考えればよい
- 全頂点対間距離:
  - 対象になる頂点のみを始点にダイクストラ
    O((H+W) HW log HW)
- 最小一般マッチング:
  - O($(H+W)^3$)
- となり、間に合う



解法の工夫

- 一般マッチングを書くのは大変なので工夫して避けたい
- マッチングを図示したとき、合計コストを変えずにパスの交差を減らすことができる
- 交差がない最小マッチング
  ➡ 頂点を時計周りに列、マッチングの辺を区間と見たとき、交差区間がない
  ➡ 交差区間のない重み最小ペアリングを求める問題に帰着できる
- 区間DPにより $O(N^3)$ で求められる





解法の工夫2

- 交差がないという条件から、偶数番目と奇数番目の頂点間でのマッチングとしてよい
- 二部グラフの最小重み完全マッチングになる
- ハンガリアン法で$O(N^3)$、Primal-Dualで$O(N^3 \log N)$

統計情報

- Acceptances
  - 20 teams
- First Acceptance
  - Guest: plasma (73 min)
  - Contestants/Onsite: Time Manipulators (82 min)