H: Sloppy city planning

原案：climpet
問題文：climpet
データセット：prime
解答：climpet, hos, prime, smiken

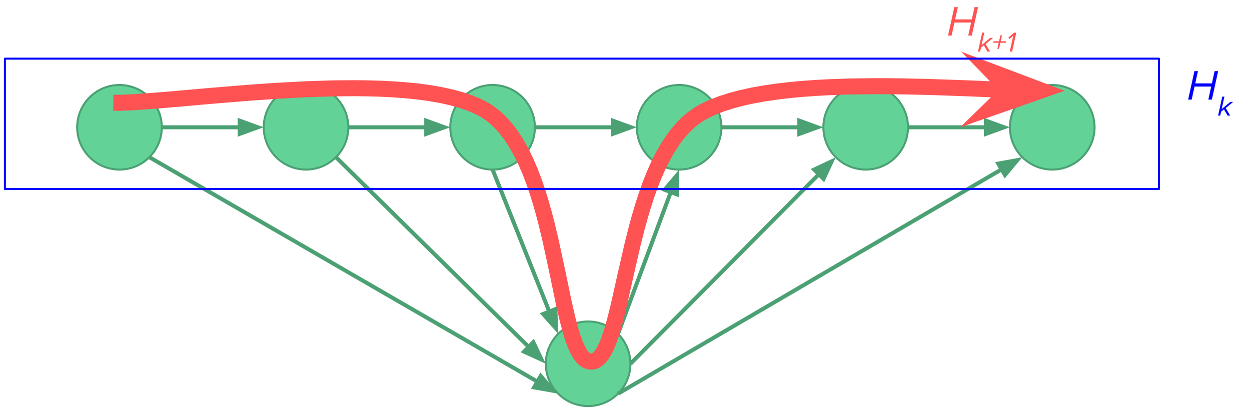
問題概要

- N 頂点の tournament が与えられる。
- 辺ごとに所定のコストを支払うことで、その辺の向きを反転させることができる。
- グラフを強連結にするのに必要なコストの最小値は？

- 制約
  - $3 \leq N \leq 3000$

ハミルトン路

- tournament には常にハミルトン路が必ず存在する。
  - ハミルトン路：すべての頂点をちょうど一度ずつ通る経路
- 証明および構成方針：数学的帰納法。k 頂点の tournament にハミルトン路 H_k が存在すると仮定する。新たに 1 頂点 (とそれに接続する辺) を追加したとき、H_k の先頭・末尾・中間のいずれかにその頂点を追加して、H_{k+1} を構成できる。



考察

- 元のグラフ G のハミルトン路を一つ求め、これを H とする。
- H の先頭および末尾の頂点をそれぞれ X, Y とする。
- X からは任意の頂点に到達可能である。同様に、任意の頂点から Y に到達可能である。
- あとは、Y から X に到達できるようにすれば、任意の頂点から任意の頂点に到達可能になりそう。

考察

- 実際、次のことが証明できる。(証明は後述)
  - Y から X への経路を (元々の辺の向きを一旦無視して) 一つ取り、これを P とする。P 上の各辺について、G と向きが異なる (つまり G 上に辺 $u \rightarrow v$ が、P 上に $v \rightarrow u$ が存在する) ならば、その辺の向きを反転させる。こうしてできたグラフG' は強連結である。
- よって、Y から X への最短経路長が答えになる。
  - ただし、順向きに辺をたどるときは辺の長さを0 とし、そうでない場合は反転コストを辺の長さとする。

解法まとめ

1. 元のグラフのハミルトン路を一つ求める。その先頭の頂点を X、末尾の頂点を Y とする。
   a. または、元のグラフを強連結成分分解し、入次数0 の強連結成分に属する任意の頂点を X、出次数 0 の強連結成分に属する任意の頂点をY としてもよい。
2. Y から X への最短経路長をダイクストラ法で求める。

- どちらも $O(N^2)$ 時間で実装できる。
  - 注意：入力が大きいので、ダイクストラの実装にlog を付けると、もしかしたら通らないかもしれません。

ちなみに

- この問題の答えは、全点対間最短経路長の最大値にも一致する。
- なので、Warshall-Floyd を走らせて最大値を出力すると、正しい答えが得られる。
- ただし、入力が大きいので、$\Theta(N^3)$ 時間の解法は多分通らないと思います。

補遺: パス上の辺を反転させてよいことの証明

補題：Y から X への経路を (元々の辺の向きを一旦無視して) 一つ取り、これを P とする。P 上の各辺について、元のグラフ G と向きが異なる
(つまり G 上に辺 $u \to v$ が、P 上に $v \to u$ が存在する) ならば、その辺の向きを反転させる。こうしてできたグラフ G' は強連結である。

補遺: パス上の辺を反転させてよいことの証明

G' が強連結であるための十分条件として、*G'* 上で次のことが示されればよい。

A) *Y* から *X* に到達可能 (そのように反転させたので、自明)
B) 元のハミルトン路 *H* 上に辺 $u \to v$ が存在するならば、*G'* 上においても *u* から *v* へ到達可能

B について、辺 $u \to v$ が反転されない場合は自明。辺 $u \to v$ が反転される場合を考える。

補遺: パス上の辺を反転させてよいことの証明

元のハミルトン路 H 上の辺 $u \to v$ が反転される場合を考える。

明らかに、元のグラフ G において Y から X へは到達不能であるから、G 上に辺 $X \to Y$ が存在する。さらに、$N \geq 3$ より、辺 $X \to Y$ は H に含まれない。また、この状況下で辺 $X \to Y$ は反転されていない (さもなくば $u \to v$ を反転させる意味がない)。

すなわち、G' 上には辺 $X \to Y$ が存在する。この辺とパス P 上の辺をたどることで、$u \to \ldots$ (P 上の辺) $\ldots \to X \to Y \to \ldots$ (P 上の辺) $\ldots \to v$ という歩道が存在する。

よって、G' 上で u から v への到達可能性は失われない。∎

統計情報

- Acceptances
  - 29 teams
- First Acceptance
  - TLE_WARLD (34 min)