

E: Gacha 101

原案: hos

問題文: chatGPT (w/ riantkb)

データセット: climpet

解答: beet, climpet, hos, kotatsugame

問題概要

- 長さ N の文字列があり、始めは全部 '0' で初期化されている。
- N 種類のボールがある。 i 種類目のボールは A_i 個ある。
- ボールをランダムな順序で一個ずつ引いていく。 i 種類目のボールを引いたとき、文字列の i 番目が '0' であれば '1' に変更する。
- 全部のボールを引き終えるまでに、(連続) 部分文字列として "101" が出現する確率を求めよ。

制約

- $1 \leq N \leq 2 \times 10^5$
- $1 \leq A_i$

問題の言い換え

- 同じ種類のボールを 2 回目以降に引いても実質何も起きないとみなしてよい。したがって、この問題は以下のように言い換えられる。
 - N 種類のボールが一個ずつある。これらをランダムな順序で引いていく。次に引くボールが i 種類目のものである確率は、 A_i に比例する。(以下略)

考察

- 余事象である、「部分文字列として“101”が一度も出現しない」という事象の確率を求めることにする。
- この事象は以下の事象と同値であることがわかる。
 - 途中経過において、すべての‘1’は連続する。つまり、任意の時点で00...0011...1100...00 という形の文字列にしかない。
- 逆に、10...01のように、二つの‘1’の間に‘0’が挟まる場合、必ずどこかの時点で“101”という部分文字列が出現してしまう。

解法

- 最初に引くボールの番号を f とする。部分文字列として “101” が出現しないためには、次の 2 つの条件をともに満たさなければならない。
 - f より番号の小さいボールは、番号の降順に引かなければならない。
 - f より番号の大きいボールは、番号の昇順に引かなければならない。
- これら 2 つの条件は独立である。したがって、それぞれの確率を求めた後、掛け合わせてよい。それぞれの確率は簡単な漸化式で求められる。
- すべての f についての上記の積の重み付き和が (余事象の) 確率となる。
- 計算量は全体で $O(N)$ で実装できる。

統計情報

- Acceptances
 - 13 teams
- First Acceptance
 - tonosama (31 min)