G: Convex Polygon MST

原案：tatyam
問題文：tatyam
データセット：tatyam
解答：beet(誤解法), hos(愚直解), tatyam

問題概要

- N 頂点の凸多角形が与えられる. この N 頂点のユークリッド最大全域木を求めよ.
- $N \leq 120{,}000$

愚直解法

- クラスカル法 : O(N^2 log N)
- プリム法 : O(N^2)

➡ 調べる辺の数を減らさないといけない！

解法

- ブルーフカ法に着目
  - 頂点集合 X について,「X 内と X 外を結ぶ辺のうち最も長いもの」は必ず使われるので,
  - 辺がない状態から始め,「各連結成分に対してこれを求めて採用する」操作を O(log N) 回行って全域木にする.
- つまり, 各頂点 v について,「v と連結でない頂点のうち, v から最も遠い頂点」が求まれば良い.

解法

- 各頂点 v について,「**v と連結でない頂点のうち**, v から最も遠い頂点」が求まれば良い.

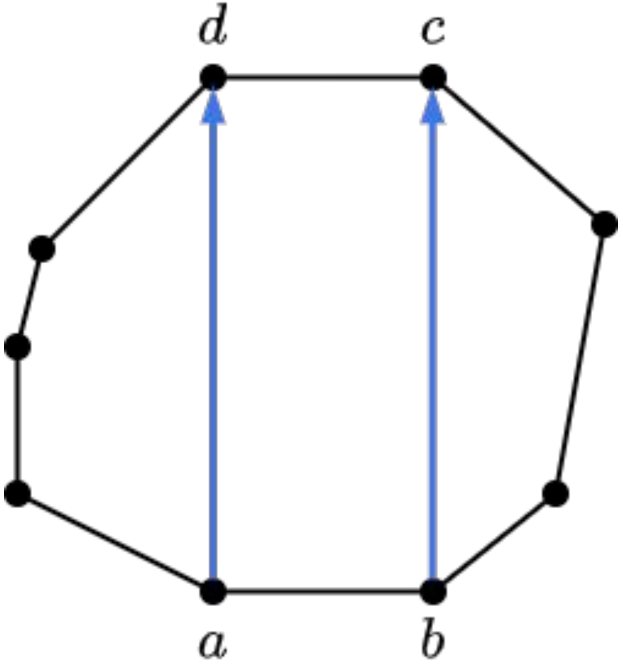
→ **この部分** が面倒なので一旦忘れてみよう

解法

- **各頂点 v について,「v から最も遠い頂点」を求める.**
- どうやって？
- 凸多角形の構造を使ってみよう

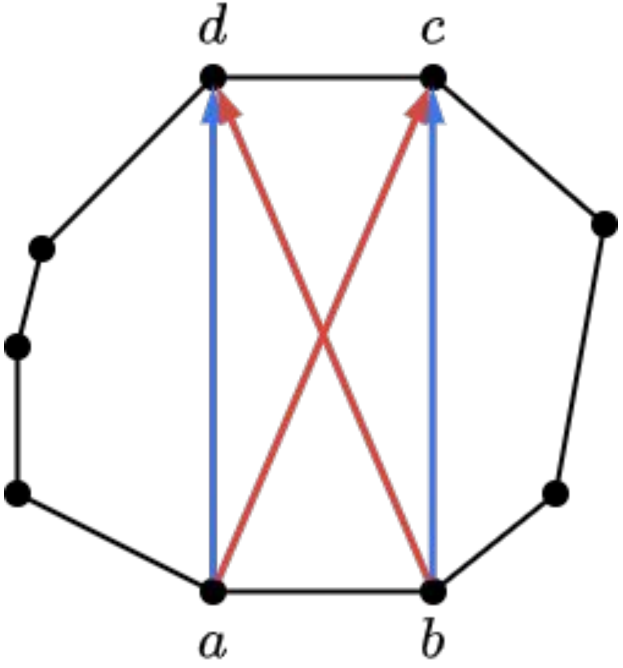
凸多角形の構造

- a の最遠点が d，b の最遠点が c のように, 最遠点への辺が並行することがない



凸多角形の構造

- a の最遠点が d，b の最遠点が c のように，最遠点への辺が並行することがない
- クロスさせたほうが，2 本の合計が長くなるため



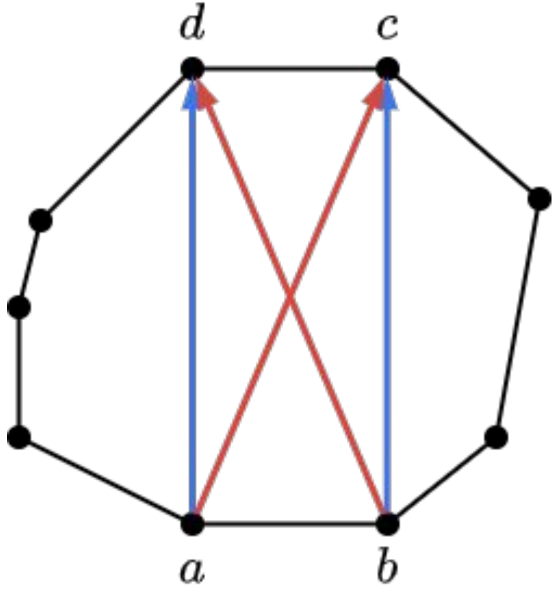
凸多角形の構造

- 反時計回りに 4 頂点 a, b, c, d を取ると,

  dist(a, c) + dist(b, d) ≥ dist(a, d) + dist(b, c)

- これは… Monge ！

最大化の文脈なので, 不等号が逆であることに注意



凸多角形の構造・Monge

- 距離行列の下三角を右にずらし, 残りを -∞ で埋めた行列が Monge

0	3	5	4
3	0	4	5
5	4	0	3
4	5	3	0

0	3	5	4	0			-∞
	0	4	5	3	0		
		0	3	5	4	0	
-∞			0	4	5	4	0

凸多角形の構造・Monge

- 距離行列の下三角を右にずらし, 残りを -∞ で埋めた行列が Monge

➡ monotone minima や SMAWK algorithm で各頂点からの最遠点を求められる.

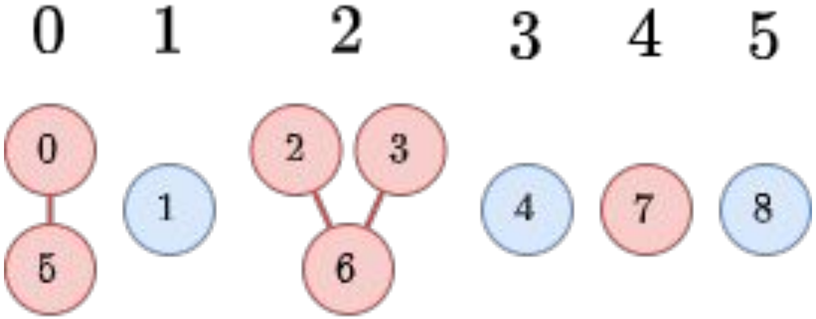
思い出してみよう

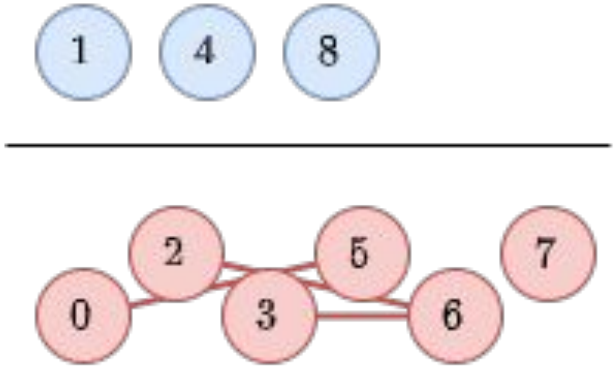
- 各頂点 v について,「**v と連結でない頂点のうち**, v から最も遠い頂点」が求まれば良い.
- 距離行列から, その頂点と連結な列を取り除ければ良いんだけど...

0	3	-∞	4	0			-∞
	0	4	-∞	3	0		
		0	3	-∞	4	0	
-∞			0	4	-∞	4	0

解法

- 各連結成分に 0 から番号をつけ, i = 0, 1, ... について, i bit 目が 0 である連結成分に属する頂点 X とそれ以外の頂点 Y に分ける





解法

- 各連結成分に 0 から番号をつけ, i = 0, 1, ... について, i bit 目が 0 である連結成分に属する頂点 X とそれ以外の頂点 Y に分ける
- X を行に, Y を列にした距離行列も Monge なので, 同様にして X の各頂点から Y のいずれかへの最長距離が求められる
- Y から X への最長距離も求め, これを各 bit についてやれば, 「連結でない頂点のうち最も遠い頂点」が求まった

まとめ

- ブルーフカ法: 各連結成分の最遠点を求めることを O(log N) 回
- 各連結成分の最遠点を求める: 連結成分を 2 分することを O(log N) 回やれば, 各頂点の最遠点を求めることに帰着
- 各頂点の最遠点を求める: SMAWK algorithm で O(N)

→ O(N (log N)^2) で解けた！

tatyam「もっと速くなるんだろな〜」

論文、ありました

- Computing euclidean maximum spanning trees

  Clyde Monma, Michael Paterson, Subhash Suri, Frances Yao
  Algorithmica volume 5, pages 407–419 (1990)

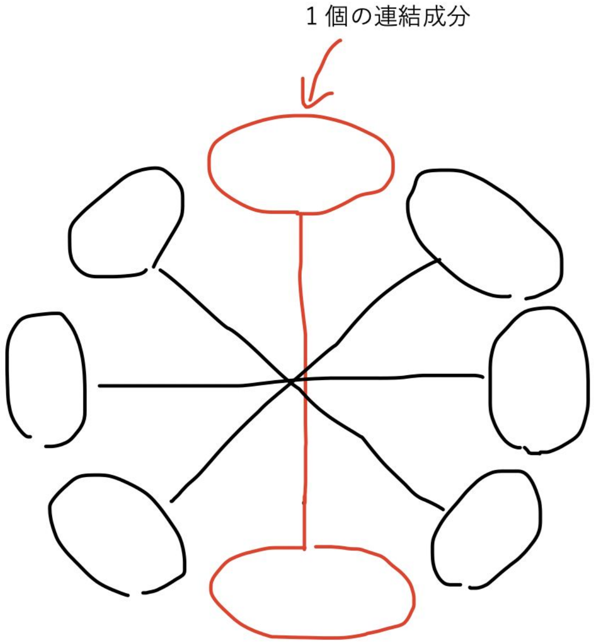
- O(N) になります

最遠点に辺を張ったときの形を観察

- ある範囲と, その対面にあるある範囲が 1 個の連結成分というような形で 1 周している

証明: 有向辺をたどっていくと辺の長さが単調増加であることに注目

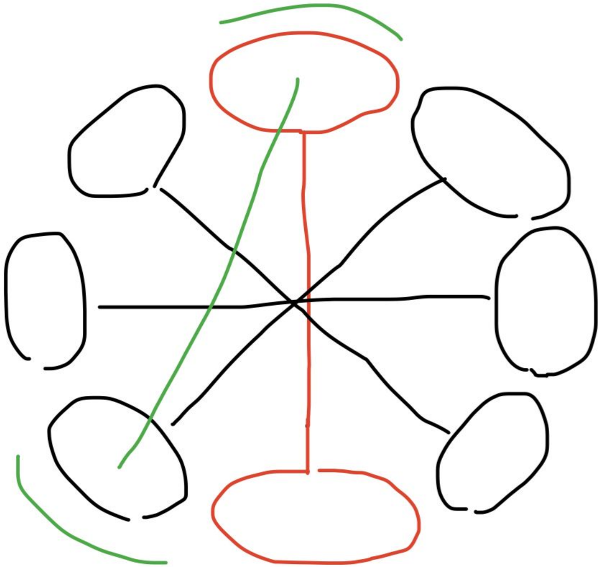
Monge の不等式とかを賢く使う



最遠点に辺を張ったときの形を観察

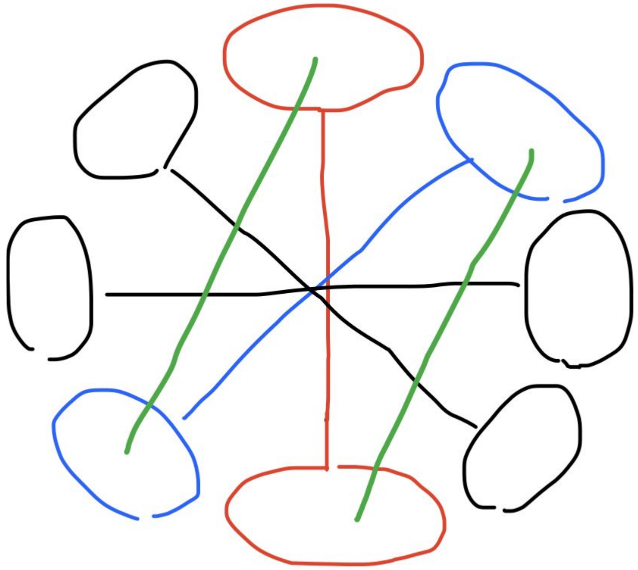
- したがって, 対面から1個ずれた部分への辺しか考慮する必要がない

証明: 気合い場合分け + 幾何



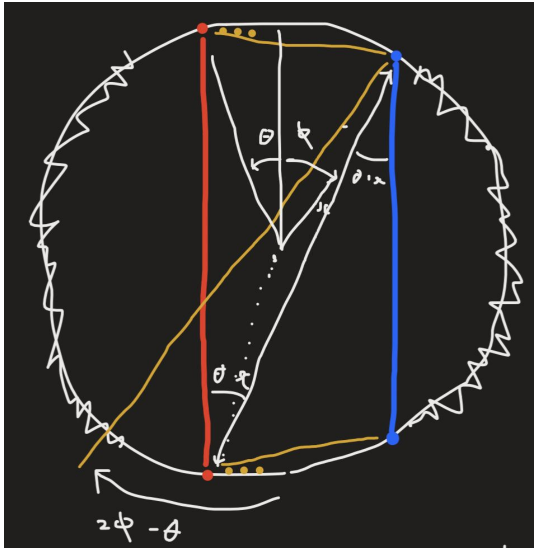
最遠点に辺を張ったときの形を観察

- すべての隣り合う連結成分について, それらの間の最遠点対を求める: SMAWK algorithm で O(N)
- 求めたものを全て採用すると N 辺になるので, 最も短い 1 本を捨てて完成



強かった嘘解法

- 各頂点から最遠点を求める. 最遠点の周囲 K 点への辺を候補としてクラスカル法を行う.
- ARC を横目にがんばると落とせる 😭



強かった嘘解法

- これは落とせなかった

熨斗袋 · Mar 29, 2023
@noshi91 · Follow
Replying to @noshi91 and @SSRS_cp

SMAWK と同じアルゴリズムで最小値を取り得る列だけを取り出します。取り除かれた行たちについて再びこれを行うことを k 回繰り返せば、得られた k 個の行列のどこかには k 番目の最小値があります。

実は、どの列も何らかの行で最小値になるような TM な行列は、各行が単峰になっています。

熨斗袋
@noshi91 · Follow

したがって、k 個の行列における最小値から左右に候補を広げていくことで O(k(N+M) + Nklog(k)) で k 番目までの最小値が求まります。

これは凸包のある点から左右に候補を広げていくアルゴリズムと同じ

12:09 AM · Mar 29, 2023

統計情報

- Acceptances
  - 0 team
- First Acceptance
  - なし